Máster Universitario en Formación de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. Especialidad: Matemáticas.

Trabajo Fin de Máster

Uniendo partes desde la distancia: las fracciones en 1º de ESO bajo un medio virtual

Diego Acedo Moscoso

Tutores: José Mª Cardeñoso Domingo y José Carlos Piñero Charlo

Facultad de Ciencias de la Educación, Puerto Real

Febrero de 2021

Declaración personal para la presentación del Trabajo Fin de Máster

D. Diego Acedo Moscoso, con DNI 77173637N, estudiante del Máster Universitario en Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, por la especialidad de Matemáticas, impartido en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Cádiz, durante los cursos académicos 2019/2020 y 2020/2021, como autor de este Trabajo de Fin de Máster titulado "Uniendo partes desde la distancia: las fracciones en 1º de ESO bajo un medio virtual", y que se presenta bajo la tutela de Dr. D. José Mª Cardeñoso y Dr. D. José Carlos Piñero,

DECLARA QUE:

El contenido de este Trabajo de Fin de Máster es original y el autor asume la responsabilidad que la detección de plagio pueda conllevar. No obstante, hace notar que, como en todo trabajo académico, a lo largo del mismo se incluyen ideas y afirmaciones aportadas por otros autores, acogiéndose en tal caso al derecho de cita.

En Puerto Real, a 20 de enero de 2021.

Fdo.: D. Diego Acedo Moscoso.

Agradecimientos

Este trabajo no habría podido finalizarse de no ser por el apoyo de tantas personas que me han enseñado, guiado, apoyado y aconsejado. A todos ellos les debo gran parte de este trabajo.

Agradecer enormemente a mis padres, Isabel y Tomás, y a mi hermana, Laura, por su confianza, apoyo, sus consejos y sus ánimos.

A mis tutores, Chema Cardeñoso y José Carlos Piñero, por su tiempo, sus valoraciones, revisiones, correcciones, ayuda y consejos.

A Antonio Baeza, mi tutor en el IES Manuel de Falla, por su disposición, implicación, consejos, apoyo y enseñanza. También a Paco Rodríguez, profesor de la especialidad de matemáticas, por sus clases, que me han permitido sentar las bases de este trabajo.

Finalmente, a mis amigos, quienes han oído hablar de este trabajo incansablemente, manteniéndose cerca y prestándome todo su ánimo.

Diego,

Enero 2021.

Resumen

El presente Trabajo Fin de Máster va dirigido a la adaptación y mejora de la unidad didáctica presentada como parte de la Memoria de Prácticas en el módulo del Prácticum de este mismo máster, referida al tema de fracciones y operaciones básicas (suma y resta) en 1º de ESO, e inmerso en el proyecto bilingüe del centro IES Manuel de Falla de Puerto Real.

Esta unidad didáctica no pudo ser llevada a la práctica debido a la situación excepcional provocada en marzo de 2020 por la crisis sanitaria COVID-19, y la suspensión de las clases presenciales. Debido a ello, realizamos una evaluación de la unidad didáctica presentada dentro de la Memoria de Prácticas a partir de la literatura relacionada, y se proponen mejoras a la luz de esta teoría, con la finalidad de que permitan a su vez adaptar la unidad didáctica al uso de un medio virtual en una situación de educación a distancia.

Sobre este análisis, presentamos la nueva unidad didáctica, basada en el uso de un entorno virtual y herramientas TIC interactivas que permitan presentar los conceptos en contextos cercanos y de manera intuitiva, a fin de que los estudiantes doten de sentido a los conceptos que se tratan.

Finalmente, presentamos una serie de conclusiones e implicaciones educativas para la futura profesión docente.

Abstract

The following Master Thesis presents an adaptation and improvement of the teaching plan presented as part of the Internship Memoir in this same M. Sc. This teaching plan dealt with the topic of fractions and basic operations (addition and subtraction) in 1º ESO, and it is part of the bilingual project of the high school IES Manuel de Falla in Puerto Real.

The teaching plan could not be put into practice due to the exceptional situation in March 2020 caused by the COVID-19 sanitary crisis, and the cancellation of face-to-face teaching. Because of this, a review of the teaching plan is done from the point of view of the literature, and didactic improvements are proposed from this theory. In addition, these changes aim to adapt the teaching plan to the use of a virtual platform in a distance learning situation.

From this analysis, we present the new teaching plan, based on the use of a virtual environment and ITC tools that allow to present the concepts in common situations and intuitive ways. This will allow students to give meaning to the corresponding mathematical concepts.

Finally, we present some conclusions and implications for future teacher instruction.

Índice

1. Introducción

El Trabajo de Fin de Máster que se presenta a continuación, titulado *Uniendo partes desde la distancia: las fracciones en 1º de ESO bajo un medio virtual* consiste en el desarrollo de una unidad didáctica correspondiente a las fracciones y operaciones básicas (suma y resta) en un curso de 1º de ESO, dentro de un programa bilingüe. Esta nueva unidad pretende realizar una mejora del diseño de intervención original propuesto en el módulo de Prácticum de este mismo Máster, presentado dentro del portafolio de Prácticas y que se incluye en el Anexo IX.

El diseño de intervención original no pudo ser llevado a la práctica debido a la situación excepcional provocada por el COVID-19 en marzo de 2020, y a la suspensión de las clases presenciales. Este suceso dio lugar a la continuación de las clases en una modalidad online, mediante el uso de plataformas virtuales como Moodle o Google Classroom, que permitieran mantener el contacto entre docente y alumno y reducir todo lo posible el impacto que esta crisis pudiera tener en el aspecto educativo.

Este cambio resultó muy complejo para una gran parte de la comunidad educativa. Muchos de los docentes y alumnos no contaban con la preparación tecnológica para afrontar el cambio a un nuevo medio virtual. Además de esto, fue necesario repensar las actividades que se realizaban en clase para adaptarlas a la nueva situación. Todo esto supuso una gran limitación a la hora de preparar las nuevas sesiones, y con ello una gran dificultad para que éstas pudieran continuarse de forma óptima.

La situación excepcional también implicó cambios en el módulo del Prácticum del Máster de Profesorado en Educación Secundaria. En mi caso, se realizó una colaboración online con mi tutor en el centro, consistente en el desarrollo de materiales (vídeos, cuestionarios y actividades autoevaluables en Moodle, en muchos casos basadas en GeoGebra) para su uso online por parte del alumnado. No obstante, durante este período no mantuve contacto directo con el alumnado, y los datos obtenidos en torno a su desempeño son muy reducidos, de modo que no se han incluido.

Debido a lo anterior, en este trabajo se ha optado por realizar una adaptación y mejora de la unidad didáctica presentada en la memoria de prácticas (diseñada para su puesta en práctica de forma presencial) que permita resolver algunas carencias, y ser puesta en práctica bajo un modelo de educación a distancia. Dada la falta de datos procedentes de la puesta en práctica, realizamos una valoración de la unidad a partir de una perspectiva teórica y de los resultados de la investigación en educación matemática y números racionales.

En base a todo lo anterior, los objetivos principales de este TFM son:

- Realizar un análisis de la unidad didáctica original a partir de las investigaciones en educación matemática, mostrar los aspectos que es posible mejorar y encontrar formas de resolverlos.
- Estudiar qué implicaciones educativas tiene el uso de un medio virtual en el proceso de enseñanza-aprendizaje, y cómo es posible llevar dicho proceso a cabo de manera adecuada, reflexionando sobre qué aspectos se mantienen, cuáles mejoran y cuáles empeoran en este nuevo modelo.
- Desarrollar una nueva unidad didáctica que mejore ciertos aspectos de la unidad anterior, y que permita a su vez ser desarrollada a distancia mediante el uso de un medio

virtual, generando a su vez un banco de recursos TIC online disponible para cualquier docente.

A fin de lograr lo anterior:

- Exponemos en primer lugar una revisión de la literatura existente alrededor de nuestra unidad didáctica. Hacemos un estudio del aprendizaje y la enseñanza de las fracciones, comprobamos qué implicaciones tiene el uso del bilingüismo en la educación matemática, y el papel que juega el uso de un medio virtual y de las TIC a la hora de enfrentar nuestra unidad.
- Analizamos desde esta literatura la unidad didáctica original y proporcionamos soluciones a los problemas que esta unidad presenta. Estos problemas se refieren, principalmente:
  - Al uso que se hace de las herramientas manipulativas, y el modelo de actividades planteadas.
  - A la adaptación de la unidad didáctica a un medio virtual y el uso de herramientas TIC.
- Desarrollamos una nueva unidad que intente resolver algunos de estos aspectos. Esta nueva unidad se basará en el uso de herramientas interactivas, el pensamiento informal del alumnado y modelos visuales, que permitan hacer los conceptos significativos para el alumnado, y relacionarlos con su vida cotidiana.
- Realizamos una serie de conclusiones en torno a la unidad, relacionándola con la teoría expuesta, incluyendo posibles medidas futuras y considerando las implicaciones de este trabajo para la futura labor docente.

2. Fundamentos teóricos

Según las dimensiones del currículo expuestas por Rico (1997, citado en Gómez, 2005), estructuramos nuestro marco teórico en cuatro puntos iniciales: análisis del contenido, teorías del aprendizaje, teorías de la enseñanza, y evaluación. A estos apartados añadimos otros dos, referentes al bilingüismo en el aula de matemáticas, y al uso de un medio virtual en el aprendizaje.

2.1 Análisis del contenido

2.1.1 ¿Qué son las matemáticas?

El objetivo principal de la educación es que el alumnado adquiera una serie de conocimientos de distinto carácter: conceptual, procedimental y actitudinal. Es por ello que la interpretación que el educador toma respecto al conocimiento tiene implicaciones importantes en la forma en que éste concibe la educación, y en los resultados que logrará (Puig, 1997). Para ello el educador debe tener en cuenta las condiciones socioculturales en las que se mueve el alumno, así como el carácter del conocimiento que pretende impartir.

Si bien todos tenemos una idea de qué entendemos por matemáticas, dar una definición completa resulta difícil. La Matemática surge, y se sigue utilizando, como una herramienta práctica, dirigida a modelar la realidad y resolver problemas relacionados con la cantidad o la forma. Sin embargo, hoy en día muchos la perciben como una ciencia formal, abstracta y absoluta, donde el matemático ideal es alguien que apenas puede explicar de qué trata aquello en que trabaja, o qué aplicaciones tiene lo que hace (Davis y Hersh, 1984). En un curso tan temprano como 1º de ESO, es necesario que el alumnado perciba la utilidad de esta materia, y la capacidad de resolver problemas que ésta le aporta.

Ahora bien, ¿de qué se ocupa exactamente la Matemática? Tal como indica Puig (1997) siguiendo las ideas de Freudenthal, podemos entender los conceptos matemáticos como medios que, en su nivel más bajo, organizan los objetos del mundo físico, sus propiedades, las acciones que hacemos sobre ellos o las propiedades de esas acciones (*phenomenae*). Estos medios de organización se incorporan a nuestra experiencia en forma de nuevos objetos, sobre los cuales podemos actuar y cuyas propiedades podemos continuar estudiando, generando nuevos conceptos matemáticos más abstractos (*noumenae*). El primero de estos procesos, más empirista y relacionado con la realidad física, se conoce como *matematización horizontal,* mientras que el segundo de ellos, más abstracto y estructuralista, se conoce como *matematización vertical* (Streefland, 1991).

Esta concepción de las matemáticas se contrapone a las corrientes platonistas: los objetos matemáticos no pueden existir de manera absoluta, en un mundo ideal, pues se construyen como medios de organización de fenómenos del mundo, y por lo tanto no pueden ser separados de nuestra experiencia. En su lugar, este planteamiento se asemeja a una concepción kantiana: las matemáticas son el resultado de una construcción *a priori*, que las personas imponen a la realidad física, pero algunos juicios matemáticos permiten conocer cómo han de ser las cosas en la naturaleza de manera previa a la experiencia. En particular, el conocimiento se constituye a partir de nuestra actividad cognitiva (Font, 2003).

Según Gómez (2005), Frege establece un triángulo semántico en torno al significado de los objetos matemáticos. Éstos se expresan en:

- *Signo*: Que permiten trabajar con los conceptos sin hacer referencia a los fenómenos de los cuales surgen.
- *Sentidos*: Como una serie de situaciones o propiedades, con orígenes sociales, que caracterizan el objeto de manera parcial.
- *Referencia*: Como el objeto en sí, dotado de un significado estable.

Es por ello que, a la hora de construir un objeto matemático, no podemos restringirnos a uno de ellos. Citando a Godino (2002),

> el punto crucial en los procesos de instrucción matemática no está en el dominio de la sintaxis del lenguaje simbólico matemático, incluso aunque éste sea también importante, sino en la comprensión de su semántica, es decir, en la naturaleza de los propios conceptos y proposiciones matemáticas y su relación con los contextos y situaciones-problemas de cuya resolución provienen (p. 240).

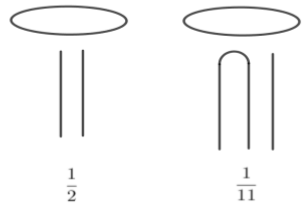
En particular, dado que son la cultura y el contexto social los que proporcionan las experiencias que generan los conceptos matemáticos, la Matemática es una ciencia que se encuentra en continuo cambio, y que ha evolucionado enormemente a lo largo de la historia.

El concepto de fracción, debido a su complejidad y a su diversidad de interpretaciones, es un ejemplo claro de esta evolución en la Matemática. Si bien el sentido que se le da es individual, el conocimiento de número racional es socialmente construido y validado (Pitkethly y Hunting, 1996). Veamos, por lo tanto, con qué fines surge este concepto, y qué diferencias existen entre las distintas culturas que lo han utilizado.

2.1.2 Desarrollo histórico del concepto de fracción

El concepto de fracción surge hace aproximadamente 4000 años, tanto en Egipto como en Mesopotamia. Como toda la matemática de la época, surge con un fin puramente práctico: poder cuantizar porciones de objetos. Anteriormente, este problema se resolvía tomando como unidades de medida piezas suficientemente pequeñas, que se iteraban (Berlinghoff y Gouvêa, 2003); es decir, se trataba de reducir los problemas en que surgían fracciones a otros en los que sólo aparecieran números naturales.

Figura 1
Fracciones egipcias. Elaboración propia basada en Berlinghoff y Gouvêa (2003).



Los egipcios asocian la idea de fracción a la de *una parte*, y por lo tanto sólo consideran fracciones unitarias. Utilizan un sistema de representación consistente en colocar un punto u óvalo sobre el número de partes en que se dividía el total, como comprobamos en la Figura 1. El resto de fracciones se representarían como sumas de fracciones unitarias con distinto denominador. Como ejemplo de ello, representaríamos:

$$\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$$

Este método de expresión de fracciones resulta muy complejo; para facilitar el cálculo, se desarrollan tablas en las que aparecían distintas representaciones de fracciones como sumas de fracciones unitarias. El ejemplo más representativo de este tipo de tablas es la que aparece en el papiro de Ahmes, documento que supone la primera referencia histórica al uso de fracciones (Boyer y Merzbach, 2011).

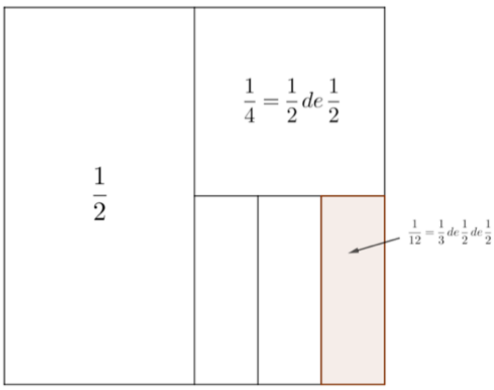
En Mesopotamia, las fracciones surgen de manera independiente. Esta civilización desarrolla un sistema posicional sexagesimal, que permite utilizar fracciones en base sesenta, de la misma forma en que actualmente expresamos los números decimales gracias a la base diez. No obstante, la ausencia de símbolos que distinguieran dónde comenzaba la parte fraccionaria hacía que resultara complejo distinguir entre números como los siguientes:

$$12{,}30 = 12 + \frac{30}{60} \text{ y } 12\ 30 = 12 \cdot 60 + 30.$$

Ambos sistemas pasarían más tarde a los griegos, donde los astrónomos adoptarían el sistema babilonio, y el modelo egipcio se mantendría en la vida diaria. Los griegos, además, darían una interpretación más amplia a las fracciones como razón, o relación entre magnitudes (Berlinghoff y Gouvêa, 2003).

Podemos observar que los sistemas anteriores son similares al actual, en el sentido de que dividen la unidad en partes iguales pequeñas, que se iteran. En la cultura oriental se desarrollarían sistemas distintos de división de la unidad: existen manuscritos rusos, de hasta el siglo XVII, en los que las subdivisiones se realizarían con piezas de distinto tamaño, relacionadas entre sí de forma multiplicativa. Por ejemplo, como aparece en la Figura 2 expresaríamos:

Figura 2
Fracción según manuscritos rusos. Elaboración propia basada en Berlinghoff y Gouvêa (2003, p. 87).



$$\frac{1}{12} = \frac{1}{3} \text{de} \frac{1}{2} \text{de} \frac{1}{2}.$$

Los matemáticos chinos utilizarían un sistema numérico similar al nuestro, y sus algoritmos también resultarían análogos, pero no considerarían fracciones impropias, sino que las representarían como números mixtos.

La forma actual de escribir las fracciones nace a partir de la expresión india, cuya primera referencia aparece en el siglo VII DC. Esta civilización escribiría un número sobre el otro, donde el inferior indicaría el número de partes en que se divide la unidad, y el superior cuántas partes se toman. Durante la edad media, escritores latinos darían nombre al numerador y denominador, y en torno al siglo XII los árabes insertarían la barra horizontal que los separa.

2.1.3 Subconstructos de las fracciones

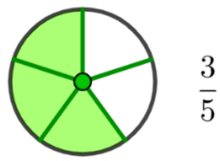
La idea matemática de fracción y, de manera más general, la de número racional, agrupa bajo el mismo concepto diversas interpretaciones. Conforme se desarrolla el sentido de número racional, estas interpretaciones se van conectando y fundiendo entre ellas hasta que podemos utilizarlas indistintamente. Sin embargo, aprender una de estas interpretaciones no implica que el resto de interpretaciones se desarrollen a partir de ésta (Behr, Lesh, Post, y Silver, 1983). De esta forma, es necesario trabajar con todas ellas y ver cómo están relacionadas. Una buena comprensión del concepto de fracción supone ser capaz de trabajar con todas sus interpretaciones, así como poder traducir entre ellas y saber cómo se interrelacionan (Kieren, 1976; Lamon, 2007; Mamede y Oliveira, 2010).

Kieren (1980) clasifica estas interpretaciones en una serie de categorías, conocidas como subconstructos. Exponemos a continuación dichas categorías.

2.1.3.1 La fracción como relación parte-todo

Fundamentalmente, las fracciones están relacionadas con la idea de ruptura de un todo en partes congruentes. Las fracciones se utilizan para cuantizar la relación entre el todo y un número de estas partes (Kieren, 1980). Como ejemplo de esto, la fracción $\frac{3}{5}$ se refiere a la relación de tamaño entre un todo (continuo o discreto), y la cantidad correspondiente a dividirlo en cinco partes congruentes y tomar tres de ellas, como se comprueba en la Figura 3.

Figura 3
El área sombreada es 3/5 del área total. Elaboración propia.



Esta idea es clave para comprender las demás interpretaciones, y una de las formas más básicas en que surge el concepto de fracción (Behr *et al.,* 1983). Es por ello que muchas secuencias de enseñanza se basan en este modelo al introducir las fracciones, usualmente utilizando contextos continuos (Llinares y Sánchez, 1997). Resulta especialmente efectivo a la hora de dar un significado inicial al concepto de fracción, así como en la suma de fracciones y la idea de equivalencia (Lamon, 2007).

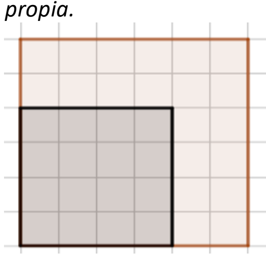
Aunque necesario, este modelo también tiene algunas limitaciones a la hora de desarrollar la idea de fracción. En particular, dificulta el trabajo con fracciones impropias: no pueden tomarse cuatro trozos de un objeto que se ha dividido en tres.

2.1.3.2 La fracción como unidad de medida

De manera muy similar al caso anterior, la fracción puede utilizarse para asignar un número a una región del espacio (ya sea éste de una, dos o tres dimensiones), que permita cuantificar su tamaño en referencia a una unidad previamente fijada. Para ello, cubrimos el todo con unidades suficientemente pequeñas, que iteramos hasta cubrir la región que queremos medir.

Como ejemplo de esto, en la Figura 4 comprobamos que, si tomamos como unidad de medida el área del cuadrado negro, entonces podemos asignar un área al cuadrado marrón: para ello, subdividimos el cuadrado negro en cuadrados suficientemente pequeños, y los iteramos hasta cubrir el cuadrado marrón. Podemos decir así que un cuadrado pequeño tiene área $\frac{1}{16}$, y por lo tanto el área del cuadrado marrón es $\frac{36}{16} = 2.25$. Esta idea nos permite aproximar el área de cualquier figura con un grado de precisión arbitraria.

Figura 4
La medida del cuadrado marrón es 2.25 veces la del cuadrado negro. Elaboración propia.



Esta interpretación de los números racionales permite acceder a ideas como la división recursiva, el orden y la densidad de los números racionales, así como la suma y resta, especialmente mediante el uso de un contexto continuo lineal (Behr *et al.*, 1983).

Podemos trabajar este subconstructo utilizando magnitudes extensivas (tiempo, distancia, área, masa…) junto a sus unidades de medida (horas, metros, m^2, kilogramos, etc.).

2.1.3.3 La fracción como cociente indicado o criterio de reparto

Podemos interpretar una fracción $\frac{a}{b}$ como la cantidad que obtiene cada parte al repartir equitativamente a objetos entre b partes. Si bien esta idea se encuentra ampliamente relacionada con la interpretación parte-todo, el contexto en que aparecen es distinto. Podemos comprobar esto de la siguiente forma: si dividimos un objeto en cuatro partes iguales, y tomamos tres de ellas (parte-todo), obtendremos la misma cantidad que si dividimos tres objetos entre cuatro personas (reparto); aunque la cantidad sea la misma, el proceso mediante el cual se obtiene cambia.

En el alumnado de 10 a 14 años es muy importante relacionar estas dos últimas ideas, pues esto permite traducir entre ambas interpretaciones y obtener distintas visiones del mismo problema (Behr *et al*., 1983).

Al igual que el modelo de relación parte-todo, la interpretación de criterio de reparto resulta muy intuitiva, y por lo tanto resulta útil para introducir la idea de fracción (Mamede y Oliveira, 2010). En la vida cotidiana existen muchas situaciones de reparto equitativo, y por lo tanto hay una gran variedad de referentes que permiten trabajar con este subconstructo (reparto de comida, pagos a medias, etc.).

La fracción como cociente indicado

Esta idea de reparto puede extenderse a considerar una fracción como una división que no se ha efectuado, es decir, un cociente indicado. Esto permite construir la idea puramente algebraica de las fracciones, como extensión de los números enteros. De esta forma, podemos definir los números racionales como el conjunto de soluciones a las ecuaciones de la forma

$$ax + b = 0$$

Donde a, b son enteros y $a \neq 0$. Esta construcción se conoce como el *cuerpo cociente de los números enteros*, y consiste en un conjunto de clases de equivalencia de pares ordenados de números enteros, $(a, b) \in Z \times Z$, bajo la relación:

$$(a, b) \sim (c, d) \text{ sii } a \cdot d = b \cdot c$$

Escribimos $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

Sobre este conjunto cociente se definen dos operaciones:

- Una operación suma:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}.$$

- Una operación producto:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

Junto a ello, se dota a este conjunto de una topología heredada de los números enteros, y a partir de ambas definiciones se derivan todas las propiedades de los números racionales.

Este modelo no está vinculado al pensamiento natural de los niños, ya que las operaciones y propiedades se desarrollan de manera deductiva y puramente formal. Es por ello que este modelo debe evitarse hasta que el alumnado haya desarrollado referentes que le permitan dar sentido a los símbolos (Llinares y Sánchez, 1997).

2.1.3.4 La fracción como operador

Podemos interpretar las fracciones como una función multiplicativa, $\frac{a}{b}$ que reduce un objeto geométrico a otro b veces más pequeño, y tras esto amplía este nuevo objeto para dar lugar a otro a veces más grande (o en el orden inverso). De la misma forma, sobre un conjunto discreto, la fracción transforma un conjunto de n elementos en otro con $\frac{a \cdot n}{b} = a\frac{n}{b}$ elementos.

Este subconstructo permite desarrollar la idea de equivalencia, el escalado, y un sentido general de las fracciones, así como la multiplicación, en forma de composición de funciones; no obstante, dificulta en gran medida la adición y la substracción (Lamon, 2007). Es por ello que resulta muy positivo relacionar este subconstructo con el de parte-todo, de manera que ambos sirvan como apoyo del otro a la hora de afrontar distintos problemas.

Una forma de trabajar este modelo es mediante tablas de proporcionalidad que relacionen una entrada y una salida. Pueden así realizarse actividades en las que se busca identificar el operador que lleva de un lado a otro, o encontrar una salida a partir de una entrada (Llinares, 2003).

También, podemos trabajar este subconstructo mediante cualquier situación en que una fracción actúa sobre una cantidad dada para modificarla. Como ejemplo de esto, tenemos ofertas que modifican el precio, repartos de cantidades, etc.

2.1.3.5 La fracción como razón de proporcionalidad

Por último, la fracción puede utilizarse como un índice comparativo entre las cantidades de dos magnitudes cualesquiera. Esta idea va más allá de la relación parte-todo. En este caso, las magnitudes no necesariamente forman parte la una de la otra. La unidad puede no existir de manera natural, sino que la relación puede establecerse de manera bidireccional, o consistir en una relación parte-parte, o todo-todo.

Como ejemplo de lo anterior, cuando decimos que "en la clase hay la mitad de niños que de niñas", estamos estableciendo una relación entre dos partes de un mismo conjunto de estudiantes, y no una relación entre una parte y el todo. Lo observamos también cuando comparamos figuras a escala, o comparamos conjuntos de puntos (relaciones todo-todo) (Llinares y Sánchez, 1997).

De la misma forma, cuando trabajamos con magnitudes intensivas, como la velocidad, o la densidad, establecemos una relación entre dos magnitudes que se mantiene independientemente del valor que toman estas magnitudes. Esta idea requiere de un mayor grado de abstracción por parte del alumnado, y por lo tanto resulta un poco más compleja (Lamon, 2007). No obstante, el alumnado desarrolla un pensamiento proporcional muy primitivo de manera informal, que es posible utilizar para la enseñanza (Siegler y Fazio, 2011).

Esta interpretación desarrolla una visión más global de las fracciones, y permite generar razonamientos y algoritmos de carácter proporcional, así como desarrollar la idea de equivalencia.

2.1.4 ¿Por qué aprender fracciones?

Las fracciones son uno de los contenidos que resultan más complejos del currículo: son complicados de enseñar por parte de los docentes, y de asimilar por parte del alumnado (Llinares y Sánchez, 1997; Lamon, 2007). Debido a todo ello, el índice de éxito en el aprendizaje de las fracciones es muy bajo (Silver, 1983; Sanz, Figueras y Gómez*,* 2018).

Sin embargo, comprobamos que en muchos casos trabajamos con otras representaciones del número racional, como decimales y porcentajes. Como ejemplo de ello, normalmente trabajamos con calculadoras en decimales (si bien ya también se utilizan calculadoras simbólicas). El sistema métrico se ha establecido en torno a unidades decimales. Los porcentajes aparecen como operadores y permiten calcular incrementos y decrecimientos. Incluso escuchamos oraciones como "2 de cada 5" en más ocasiones que $\frac{2}{5}$. Por todo esto, ¿qué fin tiene el aprendizaje de las fracciones para el alumnado de primaria y secundaria?

Nos hemos limitado a considerar que las matemáticas escolares tienen como único fin su aplicación en la vida social del alumnado. No obstante, también buscamos en secundaria que el alumnado aprecie los conceptos matemáticos y observe las relaciones entre ellos. En particular, según Freudenthal (1983), "la fracción es la fuente fenomenológica del número racional" (p. 134), es decir, la forma en que penetra el número racional. La idea de ruptura tiene implicaciones mentales mucho más fuertes que la de razón o decimal (Freudenthal, 1983). Los números racionales surgen por la necesidad de medir cantidades menores a la unidad, y de relacionar el tamaño de distintas partes con el de un todo. Las fracciones generalizan la idea de decimal o porcentaje a denominadores arbitrarios, de la misma forma en que las distintas bases numéricas generalizan el sistema en base diez.

Para desarrollar un concepto matemático, es necesario presentarlo en todas sus formas de expresión y representaciones, y por lo tanto un aprendizaje completo de los números racionales pasa por una buena comprensión de la idea de fracción. Por último, el aprendizaje de las fracciones es clave en el desarrollo de otras partes de la matemática. Se trata de una primera introducción al álgebra y a la proporcionalidad. Es por ello una parte fundamental del currículo de matemáticas, y un paso clave en el desarrollo cognitivo del individuo.

Ahora bien, mantener las fracciones en el currículo no significa que debamos mantener el énfasis en los mismos contenidos y procesos. La educación tradicional ha dado gran importancia a la enseñanza de algoritmos de operación con fracciones, que se aprenden memorísticamente y a los que no se da significado (Kieren, 1976; Sanz *et al.*, 2018). Estos algoritmos se pierden al cabo de algunos años, de modo que todo el esfuerzo acaba dando pocos resultados (Sanz *et al.*, 2018). Además de ello, las calculadoras permiten realizar dichos cálculos de manera mucho más rápida y sencilla, y existen métodos (como la traducción a números decimales) que facilitan mucho los cálculos. En lugar de esto, debemos enfatizar cuál es el significado de las fracciones y cuáles son sus características más relevantes, así como la capacidad de estimación en el alumnado, y el desarrollo de algoritmos intuitivos y que resulten significativos para los estudiantes, de modo que puedan aplicarlos para resolver situaciones sencillas de su vida diaria y más adelante en su vida escolar.

2.2 Perspectivas del aprendizaje

A lo largo de todo el siglo XX han surgido diversas corrientes intentando dar respuesta a la pregunta “¿Cómo aprendemos?”. Entre ellas, las más destacadas son la escuela conductista, la cognitivista y la constructivista, dentro de las cuales existen nuevas ramificaciones.

Según Klinger (2009), la escuela tradicional posee un marcado carácter conductista, en la que el aprendiz aparece como un recipiente vacío, que recibe la información de manera pasiva y cuyo comportamiento se regula a base de refuerzo. En respuesta a esto, el cognitivismo plantea una visión más activa del individuo, donde el conocimiento se transmite y almacena en forma de representaciones mentales: la mente pasa a compararse con un ordenador, que procesa la información que recibe (Godino, 2010).

No obstante, en los últimos treinta años, la educación ha tomado un carácter mucho más constructivista (Klinger, 2009). Según Kilpatrick (1987), la corriente constructivista parte de dos principios básicos:

1. El conocimiento es constructivamente activado por el conocimiento subjetivo, no recibido pasivamente por el medio ambiente.
2. Llegar a saber es un proceso adaptativo que organiza un mundo experimental, no descubierto e independiente. Un mundo preexistente fuera de la mente del conocedor.

De estos principios, se obtienen dos ideas principales:

- En primer lugar, que el conocimiento no existe más allá de la mente del individuo, y por lo tanto el conocimiento del profesor no puede ser transmitido a los estudiantes, puesto que su mente es inaccesible para éstos y viceversa (Sierpinska y Lerman, 1996). Esto da lugar a una visión del individuo activo, que media en la selección, evaluación e interpretación de la información que recibe, dotando de significado a su experiencia (Cubero, 2005).
- En segundo lugar, que lo que el individuo ya sabe afecta a su propio aprendizaje. La mente no es un ordenador que procesa información. Aprender significa construir esquemas mentales que categorizan los distintos objetos y permiten actuar sobre ellos. Conforme recibimos nueva información, estos esquemas se modifican para incluir y acomodar esta nueva información.

En la práctica, esto implica que el docente deja de ser el centro para convertirse en un mero guía que aporta los recursos y experiencias necesarias para que el alumnado logre construir y desarrollar sus propios esquemas. En lugar de un aprendizaje basado en la transmisión de contenidos, buscamos que el alumnado adquiera una serie de aptitudes y competencias que, poco a poco, le permitan guiar su propio aprendizaje, dar sentido a la información que recibe y tomar decisiones en base a ella.

2.3 El aprendizaje del número racional

Debido a su complejidad, el aprendizaje del número racional puede desarrollarse desde distintas dimensiones. Exponemos a continuación este desarrollo desde tres puntos de vista:

- El uso que se hace de las representaciones.
- El desarrollo del esquema de número racional a partir del de número natural.
- El nivel de formalización matemática en el uso de números racionales.

2.3.1 El papel de las representaciones

Muchas de las dificultades relacionadas con las fracciones se deben a que no se da sentido a los símbolos con los que se trabaja (Mack, 1990). En efecto, si el objetivo de la matemática es modelizar y organizar la realidad, es necesario poseer herramientas que permitan comunicar y compartir ideas. Para ello, utilizamos distintos modos de representación.

Podemos entender una representación como una herramienta que hace presente el concepto, y mediante la cual los sujetos particulares pueden interactuar con el conocimiento matemático y transmitirlo (Rico, 1997). Conforme trabajamos con distintas representaciones, y traducimos entre ellas, observamos distintas características de un mismo concepto.

En el caso de las fracciones, las representaciones juegan un papel fundamental. Según Llinares (2003), la construcción del conocimiento de número racional se realiza de la siguiente forma:

1. Inicialmente, el aprendiz realiza acciones sobre objetos que dan lugar a la construcción de representaciones internas de los conceptos relacionados con fracciones, vinculados a objetos externos y al tipo de acción que se realiza sobre ellas.
2. Estas acciones permiten comunicar y explicar ideas, que a su vez dan lugar a una interiorización de dichas representaciones internas.
3. Por último, se formalizan los patrones y relaciones encontradas, de manera que se hace posible trabajar con un lenguaje puramente simbólico.

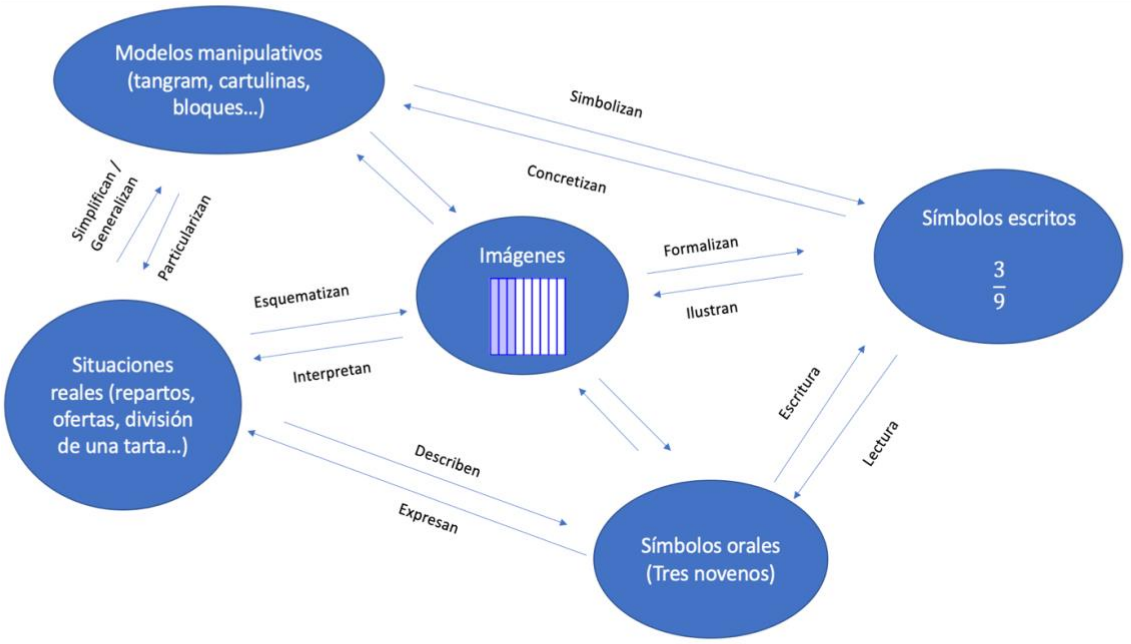
Es así que el aprendiz utiliza distintos tipos de representación, cada vez más abstractas, conforme desarrolla un sentido del número racional. En particular, Behr *et al.* (1983) ponen de relieve el modelo de Lesh (1981) sobre representaciones en matemáticas, que puede observarse en la Figura 5, y que explica cómo es posible traducir entre los diferentes modelos.

Esta traducción entre representaciones no se desarrolla de forma lineal. Normalmente, a la hora de resolver un problema no utilizamos una única representación, sino que nos movemos en función del fin que queramos lograr. Como ejemplo, si queremos comparar dos fracciones, es posible que la representación numérica no de mucha información directa, pero sí lo haga una representación gráfica de ambas fracciones sobre la misma unidad. Por lo tanto, desarrollar el concepto de número racional supone poder trabajar con cada uno de los distintos tipos de representación, así como traducir entre ellas (Behr *et al.,* 1983).

Por último, debemos destacar que, si pretendemos que las fracciones sirvan para modelar fenómenos reales, no debemos considerar el aprendizaje de los modelos de representación como un fin en sí mismo, sino como instrumentos que permitan desarrollar la competencia matemática y ser usados para lograr un fin, como la resolución de problemas (Llinares, 2003).

Figura 5

Modelo de Lesh (1981) sobre traducción entre representaciones. Elaboración propia basada en Lesh (1981).



2.3.2 El desarrollo del esquema de número racional

Los números racionales son el primer conjunto numérico en el que las experiencias numéricas de los niños no se basan en algoritmos de recuento, como los números naturales o los enteros. De este modo, surgen diferencias que suponen un cambio en la forma de pensar y usar los números que plantea dificultades a muchos alumnos (Godino, 2006). Entre los cambios que ocurren, destacamos los siguientes:

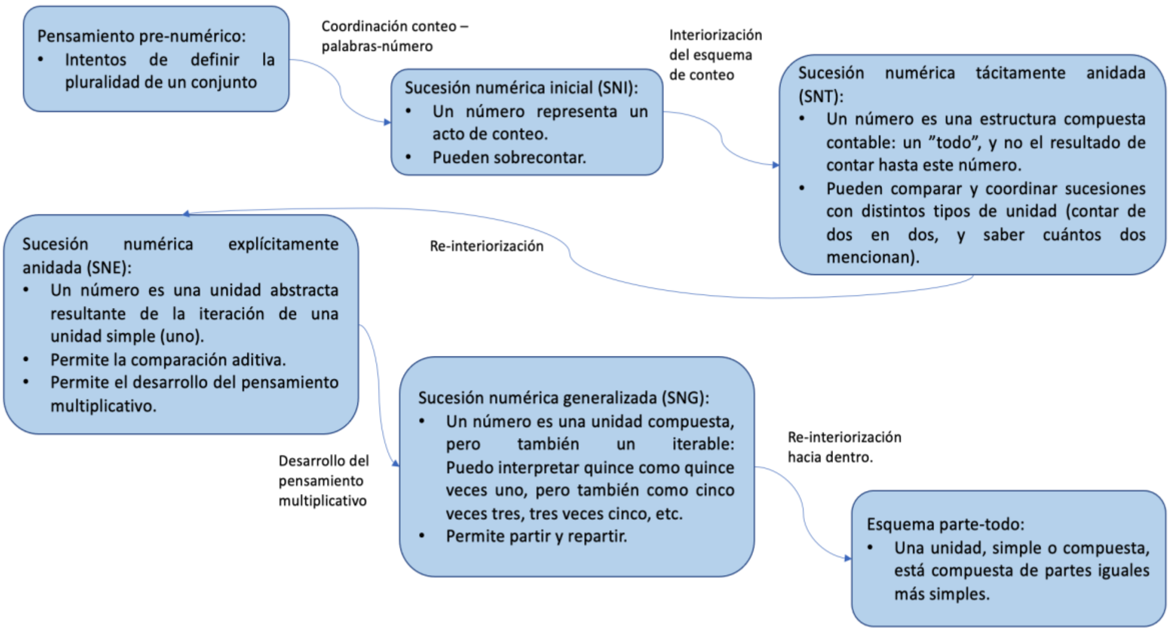
- Los números dejan de tener un único sucesor.
- Un intervalo finito pasa a contener una cantidad infinita de números.
- Varias expresiones distintas pueden referirse al mismo número (fracciones equivalentes).
- La multiplicación deja de asociarse con la obtención de números más grandes (pues multiplicar por números entre cero y uno da lugar a números más pequeños), y la división deja de asociarse con la obtención de números más pequeños.

Esto es especialmente problemático, ya que los niños suelen categorizar los objetos y eventos en base a propiedades que les son particulares (Siegler, Thompson y Schneider, 2011). Añadir estos nuevos atributos supone extender el concepto de número hacia una nueva entidad. Esto, sumado al hecho de que el sistema simbólico es similar, resulta en que algunos autores defiendan que el conocimiento que el alumnado posee sobre los números naturales pueda interferir a la hora de construir el número racional (Mack, 1990; Vamvakoussi y Vosniadou, 2010).

No obstante, Steffe y Olive (2010) han llevado a cabo un estudio con el fin de comprobar cómo los niños modifican sus esquemas de conteo de los números enteros para desarrollar nuevos esquemas que permiten extender la idea de número natural a la de número racional. Según Olive (2001), los números se interpretan como secuencias numéricas: esquemas-constructos que se van reorganizando mediante la interiorización de distintas operaciones y la necesidad de realizar otras nuevas. Un resumen del paso por estas sucesiones numéricas puede observarse en la Figura 6.

Figura 6

Desarrollo de las sucesiones numéricas según Steffe y Olive (2010). Elaboración propia a partir de Olive (2001).



El paso final, de la sucesión numérica generalizada al esquema parte-todo, es un proceso largo y complejo, pues supone entender la unidad como formada por subpartes más simples, y por lo tanto precisa de una reinteriorización de los esquemas de conteo, en este caso hacia dentro (Olive, 2001). Como ejemplo de ello, previamente el diez era una unidad formada por la iteración de unos. Ahora, el uno puede interpretarse como la iteración, diez veces, de un décimo. Este planteamiento es coherente con los resultados de Mack (1990) que muestran que el alumnado tiende a dividir el todo en partes iguales y trabajar con cada una de las partes como una unidad entera, sin tener en cuenta su tamaño.

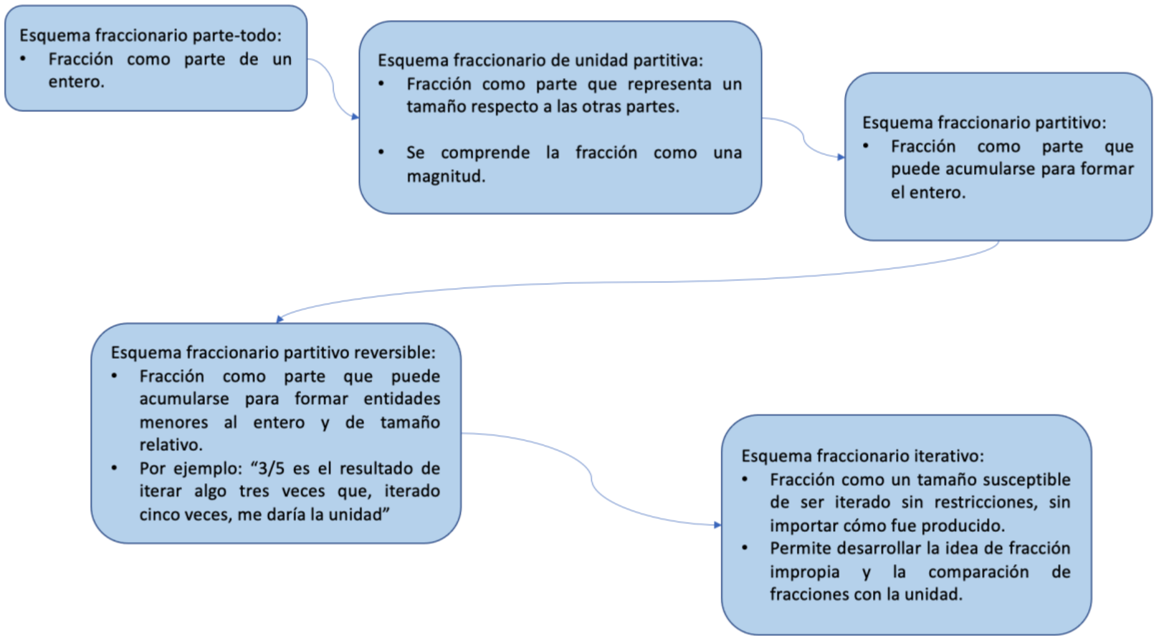
No obstante, esta trayectoria no concluye en la construcción del esquema parte-todo. En primer lugar, es necesario ampliar este esquema a otros cinco esquemas fraccionarios de iteración (Steffe y Olive, 2010), que podemos observar en la Figura 7.

A estos cinco esquemas se suman un esquema de composición de fracciones unitarias (una fracción puede dividirse en partes más pequeñas) y otro de co-medida (cualesquiera dos fracciones pueden subdividirse para encontrar un denominador común).

Todos estos esquemas permiten un desarrollo completo del concepto de número racional, así como sus propiedades y distintas interpretaciones.

Figura 7

Desarrollo de los esquemas fraccionarios según Steffe y Olive (2010). Elaboración propia basada en Cortina, Zúñiga y Visnovska (2013).



2.3.3 El desarrollo del conocimiento del número racional

En muchos casos, los esquemas anteriores se desarrollan de manera informal, a partir de la experiencia diaria del alumnado (Llinares, 2003). Es por ello que muchos estudiantes demuestran poseer, de manera previa a la instrucción, un conocimiento cualitativo, intuitivo, y de carácter aplicado, que podemos denominar como *pensamiento informal* (Mack, 1990, 1995). Este conocimiento aparece normalmente en torno a la idea de reparto equitativo, o de división de un todo, y muchas veces de manera imprecisa: se interpreta "un medio" como algo incompleto, es decir, como una parte, y no como el resultado de la división en dos partes iguales (Godino, 2006). Inicialmente, este conocimiento se encuentra desconectado de los símbolos matemáticos, pero es posible utilizarlo como base sobre la que construir el conocimiento de número racional.

Según los resultados de Piaget, citado en Cid, Godino y Batanero (2003), y en coherencia con los resultados de Steffe y Olive (2010), la división en partes iguales comienza tratando con mitades y tercios, y continúa extendiendo esta idea a cuartos o sextos por división sucesiva.

Es Kieren (1993, citado en Llinares, 2003) quien propone cuatro formas de conocer los contenidos matemáticos relativos a los números racionales, en continua evolución:

- *Conocimiento etnomatemático*, derivado de las situaciones en que normalmente viven.
- *Conocimiento intuitivo*, en que pueden utilizar instrumentos cognitivos, representaciones y el uso informal de lenguaje.
- *Conocimiento técnico-simbólico*, que resulta de trabajar con expresiones simbólicas de los números racionales.
- *Conocimiento axiomático-deductivo*, correspondiente al conocimiento de la estructura matemática.

Para el alumnado de 1º de ESO hemos de tener en cuenta que, según la Teoría del desarrollo cognitivo de Piaget, nos encontramos en la transición de la etapa de operaciones concretas hacia la de operaciones formales, de modo que los estudiantes están comenzando a desarrollar su pensamiento abstracto y su relación con los símbolos. En este sentido podemos considerar que uno de los objetivos generales de esta unidad didáctica será dar un paso entre las etapas de conocimiento intuitivo y técnico-simbólico. En particular, comprobamos que este desarrollo es coherente con los contenidos y objetivos enmarcados en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

2.3.4 Dificultades y errores comunes con las fracciones

Entre las dificultades principales que surgen a la hora de aprender fracciones, podemos diferenciar tres categorías:

- *Dificultades simbólicas*: Si bien el alumnado llega a la instrucción con ideas básicas del concepto de fracción, no consigue relacionar estas ideas con aquellos símbolos con los que trabaja (Mack, 1990, 1995). En particular, a la hora de trabajar simbólicamente, muchos estudiantes intentan aplicar el conocimiento que tienen de sistemas simbólicos previos, como el de los números enteros (Pitkethly y Hunting, 1996; Behr *et al.,* 1983). Esto además hace que resulte complicado para el alumnado entender que una fracción, como símbolo bipartito, es un único número (Kerslake, 1986). Algunos estudiantes también presentan dificultades a la hora de representar fracciones sobre rectas numéricas, cuando los extremos son distintos de cero y uno (Siegler y Fazio, 2011).
- *Dificultades culturales*: Algunos aspectos culturales interfieren con el aprendizaje de conceptos matemáticos formales. Como ejemplo de esto, la expresión “dividir a medias” puede dar lugar a que los estudiantes piensen que “la mitad” se refiere a cualquier parte de un todo, y no precisamente a $\frac{1}{2}$ (Pitkethly y Hunting, 1996). De forma similar, culturalmente la palabra fracción va asociada a la idea de “una parte” menor al todo. Para muchos estudiantes, esto dificulta la concepción de fracciones mayores a la unidad (Mack, 1995). El uso de las fracciones no suele ir más allá de los medios o los tercios, de modo que la extensión de estas ideas a otros tipos de fracciones puede resultar compleja para parte del alumnado.
- *Uso de métodos rutinarios*: la enseñanza tradicional de las fracciones ha dado mucho énfasis al aspecto computacional. Es por ello que el alumnado que ya ha recibido una cierta instrucción previa en las fracciones intenta utilizar reglas memorísticas a la hora de resolver problemas, en muchos casos dándoles prioridad por encima de su propio sentido común. Esto es especialmente representativo en el caso de la adición de fracciones con distinto denominador, o en la comparación de fracciones no unitarias en forma simbólica, como $\frac{3}{8}$ y $\frac{5}{7}$ (Mack, 1990).

2.4 Teoría de la enseñanza

Si aceptamos la perspectiva constructivista, no podemos concebir una educación puramente expositiva, en la que el alumnado se limite a escuchar, leer su libro de texto y responder preguntas. En su lugar, el aprendiz debe resolver problemas, hacerse preguntas, experimentar y explorar su realidad, e ir poco a poco desarrollando su autonomía (Camargo y Hederich, 2010).

Ahora bien, inicialmente el alumnado no siempre puede desarrollar estos conocimientos y competencias de manera totalmente autónoma. Como indican Díaz-Barriga y Hernández

(2005), el propósito de la educación es que los alumnos se conviertan en aprendices exitosos, pensadores críticos y planificadores de su propio aprendizaje, pero esto sólo es posible si:

- Se proporciona un puente entre la información de la que dispone el alumnado y el nuevo conocimiento.
- Existe una estructura de conjunto para el desarrollo de una actividad o tarea.
- El control y la responsabilidad del profesor se traspasa de manera progresiva del profesor hacia el alumno.
- Hay una intervención activa por parte del docente y el alumnado.
- Hay una interacción entre docente/adulto y alumno/menor, donde el docente es el tutor del proceso.

De esta forma, el docente toma un papel de organizador en el aprendizaje del alumnado. Para ello, es necesario que el docente posea un buen conocimiento de los estudiantes en cuanto a ideas previas, estilos de aprendizajes, hábitos de trabajo, actitudes, etc. (Díaz-Barriga y Hernández, 2005). Este conocimiento debe ir dirigido a la adaptación y mejora de la práctica docente, y al desarrollo de situaciones que permitan al alumnado superar conflictos cognitivos, desarrollar el autoconocimiento, y generar autonomía en el aprendizaje.

De entre las distintas funciones que posee un docente en el aula, hemos escogido dos que resultan especialmente clave para un adecuado desarrollo del proceso educativo: generar predisposición al aprendizaje y buena comunicación en el aula.

2.4.1 La predisposición al aprendizaje

La primera condición para que el aprendizaje se lleve a cabo es que el alumnado se encuentre predispuesto a tomar parte en su propio aprendizaje. Los factores que intervienen a la hora de lograr este objetivo son de distinta índole. En particular, distinguimos la motivación, los factores personales y los culturales, que desarrollamos a continuación.

Es común oír que el alumnado no se encuentra motivado, pero también comprobamos que dedica gran esfuerzo en otros objetivos fuera del ámbito escolar (Vaello, 2007). El docente debe lograr que el estudiante encuentre cierta satisfacción en su actividad, mantenga su atención y se comprometa en su propio aprendizaje.

Para ello, el alumnado debe ser consciente de la utilidad del conocimiento que se imparte. Presentar las matemáticas fuera de contexto, con axiomas fijos, algoritmos y operaciones abstractas resulta en un alumnado que no ve sentido a las tareas que realiza. En lugar de ello, debemos mostrar cómo los distintos conceptos matemáticos resultan útiles a la hora de resolver problemas, o plantear situaciones cercanas al alumnado, ya sea en su vida diaria, noticias científicas, etc. De la misma forma, comprobar cómo ciertos conceptos surgen de manera natural genera un pensamiento matemático mucho más significativo y es un elemento motivador. Según Gil y De Guzmán (1993), "el gusto por el descubrimiento en matemáticas es posible y fuertemente motivador para superar otros aspectos rutinarios necesarios de su aprendizaje" (p. 81).

Las emociones y la autoconfianza también resultan clave en la predisposición al aprendizaje. Cuando el alumnado no se siente capaz de afrontar tareas con fracciones, su eficacia también baja, y estos factores tienen un impacto negativo en el desarrollo de tareas posteriores (Panaoura, Gagatsis, Elia y Deliyianni, 2010). Tal y como propone Vaello (2007), el docente debe procurar que "cada día, todos los estudiantes se lleven un pez a casa" (p. 192), es decir, que sientan un cierto progreso o resultado en su aprendizaje que les motive a seguir adelante.

Finalmente, en cuanto a los factores personales, la relación entre los estudiantes y el docente no es indiferente al aprendizaje. En palabras de Vaello (2007), "el profesor, mediante el tono de voz, el comportamiento y los gestos, transmite mensajes implícitos que reflejan su actitud ante los alumnos, aunque no lo pretenda. El alumno lo capta y reacciona con una mayor/menor atención, participación, persistencia, esfuerzo, etc." (p. 187). El docente debe ser consciente de esto, y crear un clima democrático, de respeto e interés mutuo.

2.4.2 La comunicación en el aula

La comunicación entre el docente y el alumnado, así como el uso que se hace del lenguaje en el aula, son elementos clave. En Walshaw (2017) encontramos distintas actividades comunicativas que favorecen el aprendizaje. Destacamos, en la Tabla 1, las más relevantes.

Tabla 1
Actividades comunicativas en el aula. Obtenido de Walshaw (2017).

Contexto	Actividad del docente	Actividad del estudiante
Situacional	• Establecer normas de participación.	• Explicar, debatir, criticar y negociar ideas con compañeros. • Prestar atención a las propuestas de los demás.
Pedagógico	• Dar oportunidades para explicar y justificar el pensamiento y las soluciones. • Valorar las contribuciones. • Monitorizar el progreso y dar feedback constructivo. • Mostrar la utilidad de las herramientas que se proporcionan. • Retar a los estudiantes.	• Contribuir a los debates. • Aplicar el feedback recibido. • Atender a las explicaciones y dar significado propio a lo que se explica. • Dar respuestas (correctas o no) a las preguntas del profesor. • Responder a los retos propuestos.
Matemático	• Familiarizar con el lenguaje matemático. • Favorecer la explicación y el debate matemático. • Refinar el pensamiento introduciendo pasos intermedios o forzando a dar un paso más.	• Familiarizarse con el lenguaje matemático y los símbolos. • Tomar responsabilidad en la conjeturas, y proveer justificaciones para las decisiones tomadas. • Seguir los consejos proporcionados por el docente.

De la misma forma, también la comunicación e interacción entre el propio alumnado resulta clave. La interacción entre iguales estimula la discusión y la necesidad de explicitar ante los compañeros el propio pensamiento; esta necesidad de poner en palabras las ideas estimula la construcción del conocimiento y motiva para que el alumnado aprenda a aprender (Calatayud, 2018). En particular, el trabajo en grupos pequeños también estimula la motivación, el espíritu de cooperación y el desarrollo de un autoestima positiva (Pujolàs, 1997). Sin embargo, la forma en que agrupamos al alumnado tiene implicaciones directas en el éxito escolar (Calatayud, 2018). Es Pujolàs (1997) quien recomienda la división del grupo-clase en grupos reducidos, de cuatro a cinco alumnos, heterogéneos en rendimiento, género, motivación, capacidad, etc. De esta forma, los estudiantes pueden también enseñarse entre ellos, desarrollando una mayor responsabilidad y aprendizaje autónomo, y facilitando la atención a la diversidad en el aula.

2.5 La enseñanza de las fracciones

Las fracciones son, para muchos docentes, uno de los puntos más complicados de afrontar en el currículo, y comprobamos que los resultados de su enseñanza han sido muy negativos (Lamon, 2007; Sanz *et al.*, 2018). Muchos docentes demuestran un conocimiento muy básico del concepto de fracción, y cometen errores similares a los que cabría esperar en el alumnado (Castro, 2015).

Tradicionalmente, la enseñanza se ha centrado en las reglas de cálculo con fracciones. Si bien enseñar esto es sencillo, estas reglas no ayudan a pensar sobre el significado de las fracciones, y se memorizan sin saber por qué funcionan. Todo esto da lugar a que el alumnado no desarrolle su sentido numérico, y no pueda aplicar este concepto (Cid, Godino y Batanero, 2003). Además, estas reglas acaban olvidándose a corto plazo y pueden incluso sobreponerse al sentido común del alumnado a la hora de afrontar problemas (Mack, 1990).

Es por ello que debemos enfocar la enseñanza desde la mejora del sentido numérico y la resolución de problemas (Cid, Godino y Batanero, 2003). Esto no implica dejar atrás los algoritmos, puesto que estos permiten automatizar procesos. Sin embargo, supone que el alumnado debe comenzar experimentando y desarrollando estrategias sencillas que más tarde permitan que estos algoritmos resulten significativos. Se trata de encontrar un equilibrio entre una fase de situaciones concretas, que permita establecer un sentido y un significado de las fracciones, así como justificar hechos numéricos y técnicas de cálculo, y otra de situaciones formales, que permita consolidar y formalizar las técnicas de cálculo (Cid, Godino y Batanero, 2003).

2.5.1 La introducción de los contenidos

Cuando comenzamos a trabajar con fracciones, nuestro primer objetivo debe ser mostrar al alumnado la amplitud del concepto que se trata y su características fundamentales. Como indica Fandiño (2015), la definición inicial que hagamos del concepto puede dar lugar a un modelo que más tarde resulte difícil de modificar, y que sin embargo no tenga fuerza para satisfacer todos los significados que se agrupan bajo el término de fracción.

De este modo, las fracciones deben introducirse en distintas situaciones (reparto, medida, parte-todo, etc.) y modelos (área, lineal, discreto, etc.) que permitan desarrollar un sentido que resulte flexible. Debemos tener en cuenta además que muchos estudiantes parten de un conocimiento informal, aplicado, a la hora de comenzar a trabajar las fracciones (Mack, 1990, 1995). Aprovechando este conocimiento, deben plantearse problemas que el alumnado pueda entender por sí mismo y cuya estrategia de resolución lleve implícita el concepto matemático que se quiere tratar (Cid, Godino y Batanero, 2003; Llinares, 2003). El conocimiento informal suele ir ligado a situaciones de reparto y parte-todo, y contiene la idea de división en partes iguales, así como el reconocimiento de fracciones equivalentes sencillas (Kieren, 1976).

Además, los estudiantes demuestran una forma básica de pensamiento proporcional, como base del pensamiento multiplicativo, que puede aplicarse en situaciones sencillas

(Siegler y Fazio, 2011). Conforme estas ideas se van asimilando, debemos ir ampliando la idea de fracción hacia otras interpretaciones más complejas.

Una vez que el significado del concepto se ha establecido, es necesario presentar situaciones formales con fracciones, como algoritmos en las operaciones, o la reducción a común denominador. Estas situaciones deben comenzar con intentos de que el alumnado pruebe a estimar la solución, y encuentre sus propias estrategias, mediante el uso de distintas representaciones que faciliten la comprensión y la adquisición de técnicas de cálculo (Cid, Godino y Batanero, 2003; Cramer, Wyberg y Leavitt, 2008). También, Siegler y Fazio (2011) recomiendan utilizar fracciones de referencia con las que el alumnado se sienta cómodo, como $\frac{1}{2}$ ó $\frac{3}{4}$, a la hora de comparar u operar. Esto permite estimar soluciones y desarrollar el sentido numérico.

Por último, Siegler y Fazio (2011) destacan que los errores comunes deben enfrentarse de forma directa, planteando situaciones o representaciones que muestren directamente dónde se encuentra el error (suma de numeradores y denominadores por separado, operaciones con números mixtos, razonamiento proporcional, etc.).

2.5.2 Materiales manipulativos, herramientas TIC y representaciones gráficas

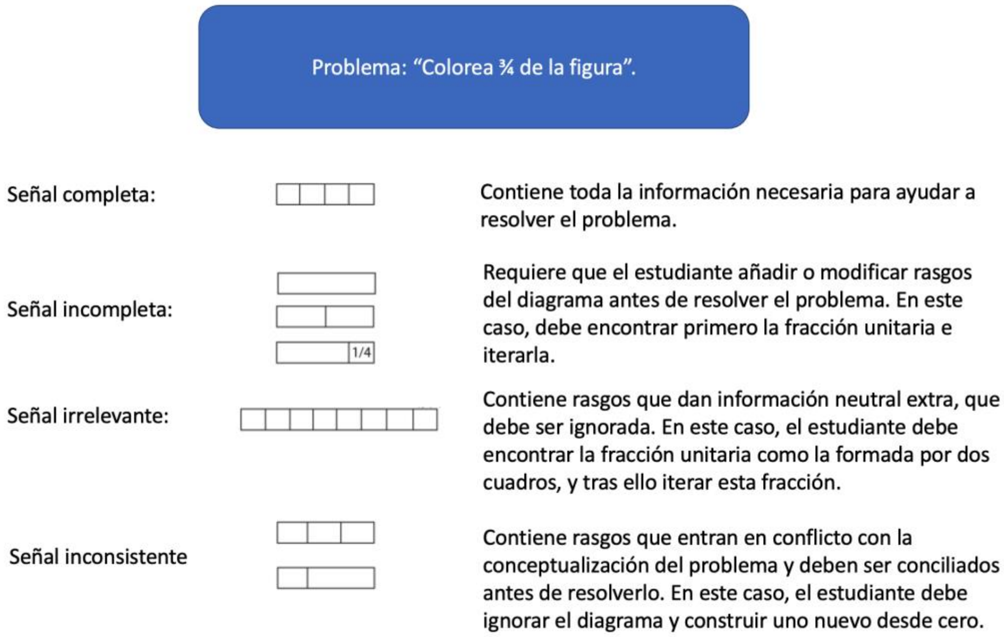
Como indicamos anteriormente, cada interpretación, modelo y representación pone de relieve características del concepto de fracción que pueden facilitar o dificultar el aprendizaje de conceptos relacionados. Debido a ello, debemos planificar cuáles introduciremos, en qué orden y con qué fines.

En cuanto a las representaciones, Behr *et al.* (1983) recomiendan comenzar con el uso de herramientas manipulativas, que permitan al estudiante reconstruir las condiciones de un problema e interactuar dinámicamente con ellas. Conforme se trabaja con estas herramientas, las ideas se van abstrayendo en estructuras lógico-matemáticas, y la dependencia de los materiales se va reduciendo en pos de un pensamiento más numérico y algebraico (Behr *et al.*, 1983).

En una situación de virtualidad, utilizar estas herramientas manipulativas físicas resulta algo más complejo. En su lugar, el uso de herramientas TIC permite virtualizar, en su justa medida, algunos de estos materiales, y ayuda al alumnado a desarrollar el sentido numérico y mejorar los resultados de aprendizaje (Yang y Tsai, 2010). No obstante, también añade un nivel de abstracción inicial mayor, al situarse en un punto medio entre la imagen y la herramienta física. A la hora de diseñar objetos virtuales de aprendizaje, debemos reflexionar sobre cómo el uso de la tecnología aporta un valor añadido a cada actividad, qué estrategias de enseñanza irán ligadas a dichos objetos, y qué posibilidades y limitaciones nos ofrece la tecnología (Triana, Ceballos y Villa, 2016).

Finalmente, a la hora de utilizar representaciones gráficas, Behr *et al.* (1983) proponen el uso de diagramas que proporcionen distintos tipos de información al alumnado, ya sea ésta útil para el desarrollo de la actividad (señales consistentes), o no lo sea y dé lugar a un conflicto cognitivo en el estudiante (señales inconsistentes, o distractores perceptuales). Las distintas posibilidades para estos diagramas se representan en la Figura 8.

Figura 8
Tipos de diagramas visualo-perceptuales. Elaboración propia basada en Behr et al. (1983).



2.6 La evaluación

La evaluación juega un papel fundamental dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje. No obstante, usualmente se diseña al margen del resto de dimensiones del currículo, o se confunde con la calificación. A continuación exponemos en qué consiste este proceso, qué fines lleva asociados, y qué aspectos hemos de tener en cuenta a la hora de diseñar una evaluación que influya de forma positiva en el proceso educativo.

2.6.1 La evaluación como facilitador del aprendizaje

Habitualmente, tanto docentes como alumnos entendemos la evaluación como sinónimo de calificación (Alonso, Gil y Martínez-Torregrosa, 1996). En efecto, uno de sus objetivos es la certificación de que se han adquirido una serie de conocimientos (Sanmartí, 2007). No obstante, esta visión es muy limitada.

Según Sanmartí (2007), la evaluación es un proceso que podemos caracterizar por:

- Una recogida de información.
- El análisis de dicha información y la emisión de un juicio sobre ésta.
- Una toma de decisiones de acuerdo con el juicio emitido.

Ahora bien, como uno de los elementos del currículo, su objetivo principal es facilitar el aprendizaje del alumnado. El proceso anterior debe ir dirigido a detectar cuáles son las causas de los errores del alumnado, y qué cambios deben realizarse sobre el proceso de enseñanza para ayudar a los alumnos en la construcción de su conocimiento (Sanmartí, 2007).

De este modo, la evaluación toma un papel regulador. El docente no sólo debe encontrar los errores del alumnado, sino que también debe analizar su origen, y qué proceso mental hay detrás de la respuesta obtenida. En base a este análisis, el docente debe modificar su enseñanza para trabajar especialmente sobre estas dificultades y conseguir que el alumnado pueda resolverlas (Sanmartí, 2007). La evaluación no sólo incluye los mecanismos de detección de dificultades, sino también las modificaciones que permiten corregirlos.

Normalmente, la reflexión anterior se ha dejado de lado, y se ha previsto que el alumnado resolvería sus errores mediante la repetición de ejercicios, exámenes, o cursos. Sin embargo, las dificultades se mantienen una y otra vez, y el constante fracaso frente a la misma tarea genera una baja autoestima y sensación de fracaso (Alonso *et al.*, 1996).

Frente a esto, si el alumnado siente que hay un interés en conocer sus errores, y se le proporcionan herramientas para combatirlos, la evaluación puede convertirse en un elemento motivador que genere una actitud de esfuerzo.

2.6.2 ¿Qué evaluar?

Como indica Sanmartí (2007), "la evaluación es el motor del aprendizaje, puesto que de ella depende tanto qué y cómo se enseña, como el qué y cómo se aprende." (p. 19). En efecto, sólo lo que se evalúa es importante para el alumnado (Alonso *et al.*, 1996). De la misma forma, debemos observar, escuchar y comprender todo lo que ocurre en el aula, a fin de dar un juicio razonado sobre el trabajo desarrollado tanto por alumnos como por nosotros mismos (Azcárate, 2005). Es por ello que debemos intentar evaluar todas las actitudes, comportamientos y tareas que realizamos en el aula.

Ahora bien, la complejidad existente en el aula hace esta tarea muy complicada, y por lo tanto debemos decidir qué consideramos más representativo, y qué podemos dejar atrás. Para ello, debemos establecer una serie de criterios explícitos, que guíen el aprendizaje del alumnado y permitan darnos evidencias de los logros alcanzados (Azcárate, 2005). Entre otros, podemos considerar criterios como la pertinencia, el uso que se hace del lenguaje, la precisión, la creatividad, la autonomía, etc.

Por otro lado, si marcamos una serie de objetivos, las actividades que realicemos deben ser coherentes con dichos objetivos, y permitir su consecución. De nada sirve que propongamos como objetivo la resolución de problemas complejos, o el fomento del pensamiento divergente, si las tareas que se solicitan son puramente reproductivas o memorísticas. Tradicionalmente, hemos limitado la evaluación a lo más fácilmente medible dejando de lado aspectos como los planteamientos cualitativos, invención de hipótesis, etc. que pueden dar lugar a respuestas imprecisas. Al no ser evaluados, dejan de tener importancia para los estudiantes (Alonso *et al.,* 1996). En este sentido, organizadores del currículo como las competencias no funcionarán como elemento activador si no se establecen estrategias metodológicas y de evaluación que las pongan en juego (Cardeñoso y Azcárate, 2012).

Finalmente, si la evaluación tiene como fin la regulación del proceso de enseñanza-aprendizaje, no sólo debemos evaluar el grado de adquisición de los objetivos del alumnado, sino en qué medida el proceso de enseñanza ha facilitado dicha adquisición, en qué grado es mejorable y cómo es posible modificarlo (Sanmartí, 2007).

2.6.3 ¿Cómo evaluar?

La metas que hemos propuesto a la evaluación no pueden lograrse con un único examen final. Es necesario encontrar procedimientos que nos permitan recopilar toda la información necesaria para adoptar decisiones, y que no sólo evalúen los resultados de los estudiantes, sino también sus procesos cognitivos, dificultades, errores y el propio diseño de la unidad (Azcárate, 2005).

En primer lugar, la evaluación debe realizarse a lo largo de todo el proceso de enseñanza-aprendizaje. Según Sanmartí (2007), distinguimos tres fases:

- *Evaluación inicial*: dirigida a analizar la situación del estudiante al empezar el proceso de enseñanza-aprendizaje. Entre otras, debemos obtener información sobre actitudes, conductas, representaciones y maneras de razonar espontáneas de cada alumno.
- *Evaluación durante el aprendizaje*: los errores deben intentar detectarse y corregirse lo antes posible, a fin de que no supongan un obstáculo para aprendizajes posteriores. También, debemos enseñar al alumno a comprender sus dificultades y autorregularlas.
- *Evaluación final*: debe realizarse una vez que el alumnado esté preparado, y ha de ayudar a reconocer qué han aprendido y tomar conciencia de las diferencias entre el punto de partida y el final.

En segundo lugar, debemos encontrar instrumentos que nos permitan recopilar información significativa. La diversidad en el aula, y en el tipo de información que queremos recopilar obligan al diseño de distintos tipos de instrumentos, según el objetivo que persigamos en cada momento, y los estudiantes a los que vayan dirigidos (Azcárate, 2005).

De entre estos instrumentos, podemos considerar tanto algunos tradicionales (como los tests orales, preguntas cortas, preguntas de elección múltiple, etc.) como otros alternativos, que recogen nueva información. Por ejemplo, tenemos la realización de diarios de clase, que permiten tanto al docente como al alumnado realizar un seguimiento del trabajo y comprobar dificultades (Azcárate, 2005). De la misma forma, el portafolio permite al alumnado reflexionar sobre qué criterios utilizan para seleccionar los trabajos a incluir, y por lo tanto tomar conciencia de su progreso. También, las redes sistémicas permiten comprobar cuáles son las causas de los errores del alumnado, y resolver problemas comunes, gracias a la organización de los modelos de respuesta (Sanmartí, 2007).

Por último, la evaluación no debe limitarse al docente. Si bien es el único que está en posición de certificar los conocimientos adquiridos, sólo el estudiante puede regular su propio aprendizaje (Sanmartí, 2007). De este modo, es necesario implicar al estudiante en su propia evaluación, y hacerle reflexionar sobre sus avances, errores y dificultades. Los alumnos aprenden más cuando se autoevalúan o son evaluados por sus compañeros, pues esta reflexión ayuda a autorregular el propio comportamiento y genera una mayor autonomía por parte del alumnado (Sanmartí, 2007).

2.7 El método *CLIL/AICLE* y la enseñanza bilingüe

El curso de 1º de ESO al que va dirigido la unidad didáctica que presentamos más adelante se encuentra inmerso dentro del programa bilingüe del centro. Debido a ello, debemos estudiar qué papel jugará el segundo idioma dentro de nuestra unidad didáctica, y qué implicaciones tiene su uso sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje.

2.7.1 La metodología CLIL/AICLE

El conocimiento de una lengua extranjera se ha convertido en uno de los objetivos más demandados a nivel social y profesional en un mundo globalizado (Marsh y Frigols, 2012).

Debido a esto, diversos programas bilingües han aparecido en los centros. En el caso de la Junta de Andalucía, estos programas están regulados por las Instrucciones de 7 de junio de 2018 de la dirección general de innovación y formación del profesorado, sobre la organización y funcionamiento de la enseñanza bilingüe. Este documento especifica que la enseñanza del segundo idioma deberá llevarse a cabo desde el enfoque CLIL/AICLE.

El método CLIL (*Content and language integrated learning)* o, en español, AICLE (*Aprendizaje Integrado de contenidos y lenguas extranjeras)* consiste en un enfoque de la enseñanza en la que un segundo idioma se utiliza como herramienta vehicular en el aprendizaje de otra asignatura (Marsh y Frigols, 2012).

La alta efectividad de esta metodología en el aprendizaje de idiomas se ha comprobado a lo largo de distintos estudios a nivel mundial, en España, e incluso en Andalucía (Dalton-Puffer, 2011; Lorenzo, Casal y Moore, 2009; Palacios y Cimas, 2019). Tal y como justifica Meyer (2010), "las lenguas se adquieren de manera más exitosa cuando se aprenden con propósitos comunicativos, en situaciones sociales significativas" (p. 17).

2.7.2 El uso de CLIL en la clase de matemáticas

Podría pensarse que, en el caso de las matemáticas, añadir un segundo idioma a la complejidad de la propia asignatura puede sobrecargar al alumnado y dificultar el aprendizaje de las matemáticas en pos de algo externo. Sin embargo, las investigaciones realizadas en este ámbito muestran que el uso de una metodología CLIL no sólo no afecta negativamente al aprendizaje del contenido, sino que también ayuda al desarrollo de las capacidades cognitivas del alumnado y da lugar a mejores resultados (Lorenzo, Casal y Moore, 2009). Según Barwell, Barton y Setati (2006), "el uso de dos o más lenguas no es causa o indicio de una baja competencia matemática" (p. 115).

Ahora bien, el discurso tiene un papel clave en las matemáticas. Como indica Lee (2006),

> para aprender matemáticas, los estudiantes necesitan hablar sobre sus ideas matemáticas, negociar significados, discutir ideas y estrategias, y construir un lenguaje matemático propio. El habla es efímera, y la escritura puede también hacer pensamiento efímeros más permanentes, y por lo tanto, más fáciles de recordar más adelante (p. 1).

Por lo tanto, es necesario establecer una serie de pautas que permitan que este discurso se lleve a cabo correctamente. Para ello, debemos tener en cuenta las siguientes ideas:

- La metodología CLIL no prohíbe el uso de una segunda lengua. En realidad, el uso compartido de la primera y la segunda lengua durante las sesiones (fenómeno conocido como *code switching)* no conlleva consecuencias negativas en el aprendizaje (Cambridge University, s.f.; Moschkovish, 2007). No obstante, debemos marcar en qué momentos del proceso se utilizará cada idioma. Se comprueba que los docentes tienden a utilizar el segundo idioma durante la enseñanza de contenidos, propuestas de actividades, y a la hora de revisar o consolidar el aprendizaje. En contraposición, el primer idioma se utilizar para realizar aclaraciones o discutir determinados problemas (Lorenzo, Casal y Moore, 2009).
- Para un uso adecuado de la segunda lengua es necesario proporcionar un vocabulario esencial, dentro y fuera de la Matemática, que permita al alumnado utilizar el segundo idioma en casos sencillos, y construir poco a poco un discurso más complejo. Según Coyle, Hood y Marsh (2010) la progresión de uso del segundo idioma en relación al contenido es también importante. Para un adecuado desarrollo, establecen la llamada *CLIL Matrix,* que podemos observar en la Tabla 2. La secuencia de números marca las distintas etapas que sigue la demanda cognitiva y lingüística dentro del proceso educativo.

- Es necesario establecer un andamiaje que facilite el desarrollo lingüístico del alumnado (Cambridge University, s.f.). Es decir, las intervenciones por parte del tutor deben estar inversamente relacionadas con el nivel de competencia del aprendiz en su tarea, de forma que cuanta mayor sea la dificultad, más directivas deben ser las intervenciones del docente (Díaz-Barriga y Hernández, 2005).
- La retroalimentación y el tratamiento del error resultan también cruciales para un aprendizaje efectivo (Meyer, 2010). Por último, el aprendizaje se lleva a cabo mejor cuando los estudiantes enlazan los distintos temas con su pensamiento informal, experiencias y actitudes (Meyer, 2010), y la gamificación y las herramientas TIC permiten crear una gran diversidad de recursos que facilitan el aprendizaje y pueden aumentar la motivación del alumnado (Almeida, 2017; Palacios y Cimas, 2019).

Tabla 2
Fases de uso del idioma en el aula según la CLIL Matrix. Obtenido de Coyle, Hood y Marsh (2010).

CLIL Matrix		**Demanda lingüística**	
		Baja	Alta
Demanda cognitiva	Alta	2	3
	Baja	1	4

2.8 El aprendizaje a distancia

2.8.1 La brecha digital

La crisis provocada por el COVID-19 dio lugar, en el mes de marzo de 2020, a la cancelación de las clases presenciales y al uso de plataformas online como medio para llevar a cabo una educación a distancia. Este sistema ha recibido numerosas críticas por parte de toda la comunidad educativa. En particular, el informe COTEC (2020) destaca tres tipos de brecha educativa surgidas debidas a este cambio:

- *La brecha de acceso a dispositivos digitales*: el 89% de los estudiantes andaluces cuenta con un ordenador en casa que puede utilizar para estudiar. No obstante, debemos considerar que es posible que sea necesario compartir este ordenador con otros miembros de la familia (especialmente junto a la aparición del teletrabajo). Sólo un 66% de los alumnos dispone de al menos dos ordenadores en casa. Además de esto, el 94% del alumnado andaluz cuenta con un espacio donde estudiar, y un 98% con conexión a internet.
- *La brecha de uso*: El nivel socioeconómico influye de manera significativa en el tiempo de uso que el alumnado hace de internet, y por lo tanto parte del alumnado requiere de una mayor guía en el uso tecnológico.
- *La brecha escolar*, o de preparación de escuelas y docentes. En Andalucía:
    - Sólo un 40% de los centros contaba con una plataforma en línea.
    - Un 40% de los profesores disponía de recursos digitales disponibles.
    - Un 47% de los profesores disponía de habilidades técnicas y pedagógicas para integrar dispositivos digitales a la enseñanza.

Todos estos datos demuestran que el sistema no contaba con la infraestructura necesaria para hacer frente a esta situación. Si el sistema educativo se basa en el principio de inclusión, ante la posibilidad de que esta situación se repita o nos veamos obligados a una situación de semipresencialidad, el Estado debe proporcionar recursos y herramientas necesarias que solucionen parte de esta brecha. Como ejemplo de esto, la *Conselleria d'Educació i Ciència de* *la Comunitat Valenciana* repartió una serie de tabletas digitales junto a tarjetas SIM con acceso a internet a aquellas familias que lo requirieran, a fin de solventar en parte la brecha de acceso a dispositivos digitales (Aznar, 2020).

Este problema va más allá del dominio del docente. No obstante, en cuanto a la formación del profesorado, cabe preguntarnos: ¿es posible llevar a cabo un modelo de educación a distancia que resulte efectivo? De ser así, ¿qué elementos debemos considerar a la hora de diseñar una unidad didáctica en este medio?

2.8.2 Ventajas e inconvenientes de la educación a distancia

Entendemos por educación a distancia un modelo educativo donde la enseñanza y el aprendizaje son separados en el espacio (y, a veces, en el tiempo), y donde la tecnología juega un papel fundamental al permitir este sistema (Ananga y Biney, 2017).

La educación a distancia supone un reto a la hora de reorganizar la metodología, actividades, recursos y el contacto con el alumnado. Si bien es un modelo que se ha utilizado previamente, esto ha sido normalmente en estudios superiores de carácter puramente instructivo (UNED, cursos online, etc.), que presentan diferencias con respecto a la educación secundaria. En nuestro caso, encontramos las siguientes dificultades:

- La comunicación con el alumnado se dificulta en gran medida, si bien, a día de hoy, contamos con distintas plataformas de videollamada que permiten mantener un contacto audiovisual.
- Puede suponer un trabajo más autónomo y una mayor necesidad de autogestión, que aún no ha sido desarrollada en una gran parte del alumnado de nuestro nivel.
- Comprobar el trabajo personal del alumnado durante las sesiones puede resultar más complicado, y con ello la recopilación de información mediante la observación. De la misma forma, no es fácil mantener conversaciones personales y dar feedback directo durante la actividad del alumnado. Nos limitamos en gran medida a la información final que recibimos, y por lo tanto no obtenemos una visión completa del alumnado.
- En relación con lo anterior, el trabajo con herramientas manipulativas resulta muy complejo, de nuevo por la dificultad de expresar y transmitir ideas mediante los materiales, o ver las estrategias seguidas por otros alumnos o el docente.
- Se dificulta la posibilidad de promover valores de educación social, civismo y respeto, así como seguir la situación personal del alumnado.
- No se conoce el efecto de la educación a distancia en el alumnado con necesidades educativas especiales (Bakia, Shear, Toyama y Lasseter, 2012).

En este sentido, no es posible virtualizar completamente el aula, y no basta con realizar las actividades que realizaríamos en una sesión presencial. Esta nueva situación obliga a una reflexión en torno a nuestras prácticas de enseñanza: debemos replantear qué queremos mantener, de qué podemos prescindir, qué necesidades posee el alumnado, o qué nos permiten los recursos de los que disponemos. Se trata de una oportunidad de utilizar prácticas alternativas, comprobar su efectividad y compararlas con las prácticas previas.

En efecto, algunos estudios muestran que el aprendizaje a distancia también puede suponer una ventaja en algunos aspectos. Entre otros, Bakia *et al.* (2012) proponen los siguientes:

- La continua disponibilidad de los materiales permite una mayor flexibilidad en cuanto al ritmo de aprendizaje que sigue el alumnado.

- El acceso a distintos tipos de recursos permite que el aprendizaje del alumnado sea más activo, facilitando prácticas de investigación o búsqueda de información.
- Algunas de las tareas rutinarias, como la corrección de ejercicios, se automatizan, lo que permite al docente dedicar más tiempo a actividades de mayor valor educativo.
- Facilita el uso de herramientas TIC, que generan una mayor motivación en el alumnado y abren posibilidades a nuevos programas multimedia y actividades interactivas.

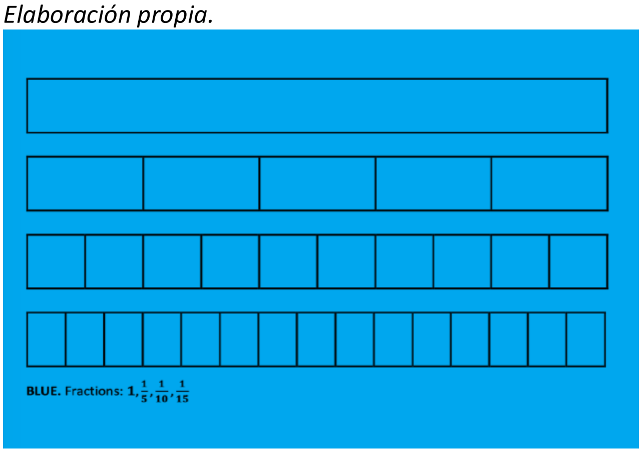
Todo esto permite un aprendizaje más autónomo y centrado en el alumno (Smith, Ferguson y Caris*,* 2002), y favorece un cambio hacia un modelo de aprendizaje constructivista (Ananga y Biney, 2017; Sangrà y Stephenson, s.f.).

3. Crítica de la Unidad Didáctica Original

A continuación, procedemos a valorar la unidad didáctica presentada en la memoria de prácticas, e incluida en el Anexo IX. Como mencionamos en la introducción, la crisis provocada por el COVID-19 dio lugar a la suspensión de las clases presenciales, de modo que no fue posible poner en práctica esta unidad didáctica. Si bien no podemos detectar todos los problemas que habrían surgido, evaluamos el diseño de la unidad desde la perspectiva del marco teórico expuesto anteriormente, y proponemos una serie de mejoras para resolver los problemas detectados.

Podemos comprobar que la unidad didáctica original se fundamenta en el uso de regletas de Cuisenaire como forma de introducir las fracciones de manera manipulativa. Para ello, se proporciona a cada estudiante un juego de cartulinas representando fracciones de una unidad mayor. Un ejemplo de este modelo de cartulinas recortables puede observarse en la Figura 9.

Figura 9
Ejemplo de cartulinas utilizadas en la UDI original. Elaboración propia.



Esto, además de ser un elemento motivador, permite al alumnado introducir los conceptos, dar sentido a los símbolos y comprobar, de manera concreta y visual, una gran parte de las operaciones que realizan con los símbolos en abstracto (comparación, simplificación, sumas y restas, etc.). De la misma forma, estos materiales favorecen la interacción entre los propios estudiantes, y les permiten expresar ideas, promoviendo el debate y el uso del lenguaje matemático.

De la misma forma, si atendemos a la metodología y el diseño de las sesiones, comprobamos que se persigue que el alumnado asuma un papel activo en su aprendizaje: cada sesión se estructura en torno a una o dos actividades principales que realiza el alumnado, complementadas con explicaciones teóricas del docente en torno al significado de dichas actividades, y actividades de refuerzo que permiten asentar las ideas expuestas en clase. Se parte de una experimentación inicial para más tarde introducir los conceptos en contexto, y se plantean dos sesiones de problemas para trabajar algunas de las interpretaciones de las fracciones, especialmente la parte-todo y la de operador.

Las ideas anteriores son en gran medida coherentes con el marco teórico expuesto. Destacamos, en particular, las ideas de Behr *et al.* (1983) en torno al uso de herramientas manipulativas y distintos modelos de representación en el uso de las fracciones. Sin embargo, comprobamos que algunos de sus aspectos son susceptibles de mejora. Desarrollamos a continuación estas ideas.

En primer lugar, se presenta una idea del concepto de fracción incompleta. La introducción del concepto únicamente mediante regletas de Cuisenaire da un gran énfasis a la interpretación parte-todo en un modelo de área, dejando de lado otros modelos e interpretaciones. Junto a ello, hemos de tener en cuenta que en una situación de virtualidad no podemos comprobar directamente cómo los estudiantes manipulan estas cartulinas, e igualmente para ellos resulta más difícil comunicar ideas mediante dichos materiales, al no poder mostrarlos o prestarlos a sus compañeros.

Debido a esto, consideramos que el uso de regletas de Cuisenaire puede ser positivo en el aprendizaje, pero no debe ser el centro indiscutible de la unidad didáctica, sino que precisa ir complementada con otros materiales y situaciones que den lugar a una visión más global de las fracciones. En la nueva situación online, hemos también de encontrar formas en que estos materiales puedan continuar utilizándose para expresarse y comunicar ideas, ya sea con el docente o con los propios compañeros.

En segundo lugar, la resolución de problemas se limita a dos sesiones de problemas tipo, en las que ya se asumen conocidas distintas interpretaciones de las fracciones. Además, algunos de los problemas están situados en contextos que pueden no ser de interés para los estudiantes, como comprobamos en la Figura 10. Junto a esto, las situaciones reales aparecen para ejemplificar y aplicar un concepto ya introducido. Sin embargo, comenzar con las matemáticas e inventar problemas que sirvan de propósito para ejemplificar su utilidad es contraproducente con una visión de las matemáticas como elemento modelador de fenómenos (Lamon, 2007).

Figura 10

Ejemplo de problema en la UDI original. Obtenido a partir de las notas del tutor en el centro.

6. $\frac{4}{9}$ of a consignment of oil weight $\frac{1826}{5}$ kg. How much does the whole consignment weight?

Aprovechando el conocimiento informal del alumnado, debemos plantear situaciones que estén a su alcance y que, sin embargo, den pie de forma natural a formalizar ideas mediante conceptos matemáticos (Mack, 1990; Streefland, 1991). Esto, junto al uso de las regletas de Cuisenaire, permitirá que el estudiante juegue con el concepto matemático de forma previa a su introducción, obteniendo así una base sobre la que apoyarse a la hora de buscar ejemplos o evaluar hipótesis.

Observamos también que, en cuanto a la metodología seguida, el docente acaba por exponer y presentar los conceptos y algoritmos que aparecen en las actividades. La institucionalización de las ideas y algoritmos es necesaria, pero antes de ello es necesario fomentar un debate en el alumnado tras cada actividad, que recoja las ideas clave y organice las estrategias e hipótesis planteadas, para introducir los distintos conceptos como una síntesis de estas ideas e hipótesis.

De la misma forma, el docente deberá prestar una mayor atención a las actividades de los estudiantes, detectando posibles errores y sus causas, y proponiendo nuevas situaciones que creen conflictos y permitan resolver dichos errores.

El material utilizado se presta en gran medida al trabajo grupal. Como hemos mencionado, las tarjetas facilitan la comunicación, y permiten ejemplificar ideas que, simbólicamente, resultarían complejas. Además, los estudiantes pueden compartir tarjetas (por ejemplo, para formar fracciones impropias). Sin embargo, no se aclara la agrupación del alumnado durante las sesiones (salvo en casos concretos, como la sesión 8). Formar grupos pequeños y heterogéneos permite a los estudiantes aprovechar lo anterior y conocer cuándo pueden o no conversar con sus compañeros, aclarando su rol y fomentando el debate y el intercambio de ideas.

Comprobamos además que, en gran medida, la segunda lengua no está integrada en el aprendizaje, y tampoco queda claro su papel en la unidad didáctica. Apenas se tiene en cuenta el nivel de idioma de los estudiantes para poder seguir las sesiones: se trata de una unidad didáctica común traducida a un segundo idioma. Es necesario concretar cómo utilizar la segunda lengua, tanto por parte del docente como de los estudiantes, y proporcionar herramientas que faciliten su uso.

Observamos que la evaluación tiene lugar en distintos momentos del proceso, pero la información obtenida va dirigida, principalmente, a dar una calificación numérica a cada estudiante, dejando de lado la reflexión en torno a qué contenidos y competencias trabajan cada una de las actividades propuestas o qué indicadores de logro se utilizan para comprobar su desarrollo.

Por último, hay que destacar que la unidad original está preparada para realizarse de manera presencial, y su adaptación a un medio virtual requiere reflexionar sobre si es posible virtualizar los materiales, cómo fomentar la interacción entre el alumnado, y cómo recopilar información sobre su trabajo, especialmente en torno a la observación.

4. Propuestas de mejora de la unidad didáctica

Partiendo de la crítica realizada en el capítulo anterior, presentamos a continuación una serie de posibles mejoras que resuelvan algunos de los problemas expuestos.

4.1. Modificaciones en las actividades a realizar, agrupamientos y uso del segundo idioma

En la nueva unidad didáctica mantendremos el uso de regletas de Cuisenaire como forma intuitiva de introducir algunos de los conceptos, como el de fracción, equivalencia, u operaciones básicas, de acuerdo con las ideas de Behr *et al.* (1983). No obstante, tal y como indica Fandiño (2015), debemos evitar dar definiciones limitadas de las fracciones, que no muestren su significado completo. En este sentido, partiendo de los estudios de Mack (1990, 1995) y Streefland (1991) complementaremos el uso de este material con la propuesta de problemas intuitivos, que los estudiantes puedan resolver utilizando su propio conocimiento informal, y que muestren en situaciones reales la utilidad del contenido que se está impartiendo. De esta forma, trabajamos los distintos tipos de representación propuestos por Lesh (1981), y las distintas interpretaciones de las fracciones (Kieren, 1980). Asimismo, comenzamos con un modelo de pensamiento etnomatemático e intuitivo, y avanzamos hacia otro más técnico-simbólico, siguiendo las etapas marcadas por Kieren (1993).

Siguiendo las ideas de Pujolàs (1997) se formarán, al comienzo de la unidad, grupos heterogéneos de cuatro alumnos. Esto facilitará el intercambio de dudas e ideas, el debate y el planteamiento de conjeturas, aprovechando así las oportunidades comunicativas que ofrece el material manipulativo. El docente motivará el debate, tanto en los grupos pequeños como en el global, dando pautas de actuación, retando a los estudiantes y regulando las discusiones, según las indicaciones de Walshaw (2017).

Por último, se regulará el uso del inglés en la unidad didáctica, ajustándolo al nivel educativo y al conocimiento del alumnado. Se utilizará principalmente a la hora de introducir las actividades, formalizar conceptos y escribir las soluciones de algunos problemas.

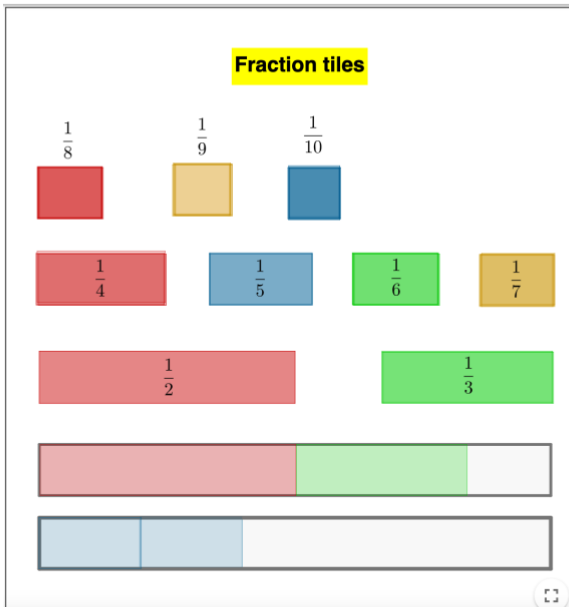
En contraposición, se permitirá el uso del castellano a la hora de debatir o de expresar ideas complejas, así como en la resolución de dudas. Como indica Moschkovish (2007), esto no resulta nocivo en el aprendizaje del segundo idioma, y permite que los estudiantes se comunicen de manera más fluida y espontánea. Junto a ello, utilizaremos herramientas TIC y plantearemos problemas informales, todo lo cual facilita el aprendizaje del segundo idioma (Meyer, 2010). Por último, se dará un vocabulario básico, se facilitarán expresiones sencillas a la hora de resolver las actividades, y el docente ayudará a los estudiantes a la hora de expresarse oralmente en este segundo idioma, dando lugar así a un andamiaje que facilite su uso (Cambridge University, s.f.).

4.2 La adaptación a un medio virtual y el uso de TIC

La unidad que presentamos inicialmente dependía del medio presencial en muchos aspectos: se esperaba que el docente y los estudiantes pudieran comprobar mutuamente el trabajo de otros con las cartulinas, llegando incluso a prestarlas entre sí para poder trabajar, por ejemplo, con fracciones impropias. La comunicación espontánea en parejas o grupos pequeños resultaba fundamental para generar y compartir ideas, proponer hipótesis y plantear dudas, motivando así las actividades a realizar, y facilitando la introducción de modificaciones que plantearan nuevos retos.

Figura 11

Virtualización de las regletas de Cuisenaire. Comprobación de que 1/2 + 1/3 no es igual a 2/5. Elaboración propia.



En un ambiente virtual, tanto el docente como los estudiantes pierden gran parte del contacto visual. Ejemplificar ideas mediante materiales físicos requiere de cámaras y no resulta tan efectivo. Para resolver este problema hemos utilizado la plataforma GeoGebra de dos formas distintas:

- Se ha decidido virtualizar los materiales anteriores mediante el uso de applets de GeoGebra: herramientas interactivas virtuales con las que los estudiantes pueden manipular distintos datos y comprobar cómo dichos cambios afectan a distintos modelos de las fracciones, de manera simbólica, visual y en relación a un determinado problema. En la Figura 11 puede observarse el applet correspondiente a la virtualización de las regletas de Cuisenaire, utilizado para comprobar que $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\neq\frac{2}{5}$.

- Las actividades se han diseñado utilizando la plataforma web GeoGebra Classroom. Esta plataforma no sólo permite proponer actividades a los estudiantes actividades, sino que también permite al docente comprobar el progreso de los estudiantes sobre estas actividades, y manipular los applets en dichas actividades. Podemos comprobar esto en la Figura 12. El docente comprueba que el estudiante observa cómo $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$.

Figura 12

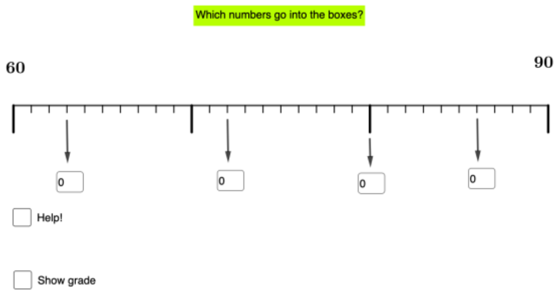
Ejemplo de uso de GeoGebra Classroom. El docente observa cómo el estudiante encuentra fracciones equivalentes mediante las regletas. Elaboración propia.

Estas modificaciones hacen que nos desviemos ligeramente del modelo de representaciones de Lesh (1981), para incluir un nuevo modelo de representación situado entre lo gráfico y lo manipulativo. Al ser virtuales, estos materiales resultan inicialmente más abstractos que los materiales físicos, pero mantienen muchas de sus funcionalidades, y conllevan mejoras en el aprendizaje (Yang y Tsai, 2010). En este caso comprobamos que las nuevas regletas pueden resultar algo más difíciles de manipular, pero aún permiten comprobar qué son fracciones equivalentes, comparar fracciones sobre la misma unidad, o dar un significado a la operación de fracciones. El docente puede visualizar en todo momento cómo los estudiantes manipulan estos materiales, y reaccionar de forma acorde. Los estudiantes tienen acceso a estas actividades en cualquier momento, pudiendo así comprobar su progreso o repetir algunas de ellas con pequeñas modificaciones, para aclarar dudas.

Como hemos indicado en el apartado anterior, buscamos una unidad didáctica que no dependa únicamente de estos materiales. Debido a ello, se ha desarrollado un banco de applets de GeoGebra que permite tratar las fracciones desde distintas interpretaciones y representaciones. Para su diseño se han tenido en cuenta los conceptos que buscan enseñar, cómo van a ser utilizadas en el aula, y qué aporta la tecnología, según las indicaciones de Triana, Ceballos y Villa (2016). Todos los applets se han incluido en el Anexo III, junto a una descripción y justificación de su valor educativo, según los puntos anteriores. Mostramos en la Figura 13 uno de estos applets, dirigido a posicionar números sobre la recta numérica. Este applet puede encontrarse en el [siguiente enlace.]

Figura 13

Applet de posición de números sobre la recta numérica.



En una situación de aislamiento, también se ha decidido optar por sesiones síncronas, que aporten una gran interacción entre el propio alumnado. Se utilizará la plataforma Moodle del centro para hacer llegar todos los materiales y enlaces a las videollamadas de las sesiones.

Se utilizará la plataforma BigBlueButton, integrada en Moodle, para realizar las videollamadas. Se ha elegido esta plataforma porque permite formar salas pequeñas a partir del grupo global, facilitando el trabajo en grupo y con ello la comunicación durante las sesiones. Además de esto, BigBlueButton posee una pizarra colaborativa, que servirá a los estudiantes y al docente para comunicar ideas mediante símbolos o dibujos.

5. Mejora de la Unidad Didáctica

5.1 Contexto

La unidad didáctica que se expone a continuación va dirigida a tres grupos de 1º de ESO del IES Manuel de Falla, en Puerto Real, en el contexto de la situación excepcional provocada por el COVID-19 en marzo de 2020, y la suspensión de las clases presenciales.

Ante este suceso, el centro contaba con una plataforma virtual basada en Moodle. Todo el alumnado tuvo acceso a la plataforma, así como los conocimientos básicos para acceder al material disponible y las actividades. Esto permitió continuar el proceso de enseñanza-aprendizaje, y se mantuvo una comunicación constante entre el profesorado y el alumnado. No obstante, más allá de esto, cada docente procedió de forma distinta en cuanto a la estructura de las clases y las plataformas de videollamada utilizadas para un contacto más directo con el alumnado.

Para resolver los problemas que pudieran surgir en torno a la brecha tecnológica, la empresa de telefonía e internet *EPRESA,* en convenio con el ayuntamiento, proporcionó internet gratuito a todas las familias que lo necesitaran, de modo que todo el alumnado contó con acceso a internet. En cuanto al acceso a dispositivos, durante el segundo período de prácticas se comprobó que todo el alumnado contaba con al menos un ordenador o tablet que le permitiera continuar con las sesiones de dudas online, y realizar las actividades propuestas en Moodle.

5.1.1 Características del alumnado

El nivel socioeconómico del alumnado es, en general, medio-bajo. Gran parte de las familias trabajan en el sector industrial, y muchas de éstas en los astilleros situados en las afueras de la localidad.

Los tres grupos de 1º de ESO tienen un ratio muy bajo, de unos 15 alumnos por clase, y han sido formados de manera heterogénea en cuanto a género, personalidad y ritmos de aprendizaje (ver Tabla 4). El bajo ratio se debe a la detección temprana de alumnado con dificultades de aprendizaje, gracias al Programa de Tránsito del centro. No obstante, el contacto con el alumnado en el primer período de prácticas reveló que éste posee una gran capacidad de resolver problemas situados en su entorno cotidiano, pero muestra dificultades a la hora de abstraer o generalizar los métodos que utiliza para resolver estos problemas, o trabajar de manera simbólica.

Tabla 3
Alumnado de 1º de ESO.

Grupo	Número de estudiantes	Alumnas	Alumnos	NEAE
A	13	4	9	0
B	17	7	10	1
C	16	7	9	0

Si bien el grado de cohesión de los grupos no es muy alto, sí existen pequeños subgrupos en cada clase, normalmente del mismo género; no se encuentran alumnos excluidos del grupo clase, absentistas ni con Adaptaciones Curriculares, en ninguno de los grupos. Sólo encontramos un alumno NEAE entre los grupos, que sufre disortografía leve; la profesora de Pedagogía Terapéutica del centro recomienda el uso de imágenes u otras herramientas visuales que no involucren demasiado el texto escrito.

En general, el alumnado percibe la asignatura como algo abstracto y obligatorio, pero no ve utilidad práctica a su contenido, y parece poco motivado a la hora de enfrentar la asignatura. Pese a esto, muchos de ellos responden activamente en clase, y reflexionan en torno a pequeños retos planteados por el docente, una vez entienden el sentido de la pregunta que se les hace.

5.2 Objetivos

Objetivos principales

- Desarrollar un sentido del número racional en distintas situaciones y representaciones, así como detectar sus diferencias con los números enteros, aprendiendo a estimar y comprobar su tamaño relativo.
- Aprender a utilizar herramientas tecnológicas que permitan representar conceptos matemáticos, facilitar los cálculos y comunicar ideas.
- Reconocer fracciones y utilizarlas para estimar o resolver problemas sencillos de la vida diaria.
- Promover la comunicación y el intercambio de ideas.

Objetivos secundarios

- Utilizar expresiones matemáticas sencillas en una segunda lengua.
- Potenciar la capacidad de encontrar patrones mediante la prueba y error, y buscar causas que justifiquen la aparición de estos patrones.
- Desarrollar la capacidad de generar hipótesis, planteamientos a los problemas, y evaluar las soluciones obtenidas.
- Motivar al alumnado mediante el uso de herramientas tecnológicas y situaciones cercanas a su realidad diaria.

5.3 Competencias

5.3.1 Competencias clave

Exponemos a continuación cada competencia clave, junto a los indicadores de logro que se utilizarán para evaluarla y los criterios de evaluación asociados a cada competencia, según lo establecido en la Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía.

Tabla 4

Competencias clave, indicadores de logro y criterios de evaluación asociados. Elaboración propia.

Competencia clave	Indicadores de logro	Criterios de evaluación
CL	Expresa correctamente el proceso seguido en la resolución de un problema. Utiliza adecuadamente conceptos matemáticos para expresar ideas. Conoce y utiliza expresiones sencillas en un segundo idioma.	1.1, 2.1
CMCT	El desarrollo de la competencia matemática se desarrolla en el siguiente apartado, mediante las competencias de Niss.	1.1, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 1.11, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4
CAA	Evalúa sus acciones y resultados y aprende de ellas en situaciones futuras. Planifica la resolución de problemas. Utiliza pertinentemente herramientas para comprobar soluciones.	1.4, 1.6, 1.10, 1.11, 2.4
CSC	Aporta dudas e ideas en su grupo. Se comunica de manera constructiva y asertiva. Respeta los ritmos de aprendizaje de sus compañeros. Se interesa por las actividades realizadas y motiva a sus compañeros.	1.8, 1.10, 2.1
CEC	Posee una actitud adecuada del trabajo en matemáticas, con esfuerzo, perseverancia y aceptación de la crítica.	1.8
SIEE	Plantea hipótesis y posibles soluciones para resolver actividades y problemas. Evalúa de forma coherente con la realidad. Toma decisiones en base a la información matemática recibida.	1.2, 1.6, 1.8, 2.4
CD	Utiliza correctamente el software inherente a la unidad didáctica (Moodle, GeoGebra, navegación web…). Utiliza herramientas tecnológicas para encontrar y evaluar soluciones a problemas.	1.11, 2.4

5.3.2 Competencias de Niss

A las competencias anteriores sumamos las propuestas por Niss (2003) a fin de lograr una adecuada alfabetización matemática, que permita al individuo desenvolverse social y profesionalmente. En la Tabla 5 exponemos cada competencia junto a un indicador de logro máximo, que nos permitirá comprobar en qué grado ha sido desarrollada. Estos indicadores aparecen integrados en la evaluación, mediante las rúbricas de los Anexos V, VI y VII.

Los indicadores de logro resultan de la adaptación de los propuestos en Niss (2003) en base al modelo de actividades que presentamos y el nivel formativo al que van dirigidas.

Tabla 5

Competencias de Niss e indicadores de logro asociados. Elaboración propia a partir de Niss (2003).

Competencias de Niss	Indicadores de logro
Pensar matemáticamente	Extrapola ideas entre distintos tipos de fracciones (distintos denominadores, fracciones impropias…). Evalúa sus propias estrategias al manipular los materiales.
Proponer y resolver problemas matemáticos	Plantea y elabora estrategias que le permiten resolver problemas asociados al uso de las fracciones, dentro de las matemáticas y en situaciones reales.

Competencias de Niss	Indicadores de logro
Modelar matemáticamente	Encuentra fracciones en entornos cotidianos y utiliza sus propiedades para obtener información sobre el medio. Identifica y diferencia distintas interpretaciones de las fracciones, actuando de forma acorde a la situación.
Razonar matemáticamente	Encadena argumentos sencillos para generar otros más complejos. Diferencia entre datos principales e irrelevantes. Distingue entre argumentos informales, o concretos, y su formalización.
Representar entidades matemáticas	Traduce correctamente entre representaciones manipulativas, gráficas o simbólicas. Relaciona fracciones, decimales y números mixtos.
Utilizar correctamente símbolos y formalismos	Relaciona modelos gráficos con los símbolos asociados. Expresa ideas mediante conceptos relacionados con las fracciones. Manipula apropiadamente fracciones y realiza operaciones sencillas.
Comunicarse en, con y sobre matemáticas	Utiliza correctamente términos matemáticos. Demuestra comprensión cuando se utilizan conceptos matemáticos para expresar ideas.

5.4 Contenidos

Esta unidad didáctica forma parte del Bloque 2: Números y Álgebra, según lo establecido en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. En base a esto, los contenidos básicos a trabajar en esta unidad didáctica son los siguientes:

- Fracciones en entornos cotidianos.
- Fracciones equivalentes.
- Comparación de fracciones.
- Representación, ordenación y operaciones con fracciones.
- Relación entre fracciones y decimales.

A fin de desarrollar estos contenidos, es necesario introducir otros conceptos y procedimientos relacionados con las fracciones. Incluimos todos los conceptos a desarrollar mediante un mapa conceptual, que puede encontrarse en el Anexo II.

Destacamos que en esta unidad didáctica no trabajaremos las operaciones de multiplicación y división de fracciones. Su significado es más complejo que en las operaciones de suma y resta, si bien sus algoritmos son más sencillos. Evitamos incluirlos para dar mayor importancia al resto de conceptos y generar una idea más profunda del concepto de fracción.

Por último, cabe destacarse que será necesario que el alumnado tenga cierto conocimiento sobre los números decimales, la división entera y decimal, y la jerarquía de operaciones entre números enteros. De la misma forma, el alumnado ya ha sido introducido previamente a las fracciones en entornos intuitivos y mediante la equipartición. En este caso pretendemos desarrollar una visión más simbólica y numérica, y formalizar ciertas estrategias e ideas.

5.5 Metodología

Esta unidad didáctica está preparada para ser impartida de manera online mediante sesiones síncronas, en las que todo el alumnado se encuentre conectado simultáneamente junto al docente; esta conexión se realizará mediante la plataforma BigBlueButton. Dichas sesiones se complementarán con materiales y cuestionarios que permitan asentar los contenidos y mostrar diferentes perspectivas de los conceptos impartidos. Se utilizará la plataforma Moodle del centro para alojar los distintos recursos y como medio de comunicación con el alumnado.

Durante las sesiones síncronas se plantearán actividades intuitivas que el alumnado pueda resolver utilizando su conocimiento informal o los conceptos ya tratados durante la unidad, pero que contengan implícitamente el concepto que se quiera tratar en dicha sesión. Estas actividades se realizarán en grupos de cuatro alumnos. El docente se moverá entre las distintas salas virtuales con los distintos grupos, observando las estrategias del alumnado, resolviendo posibles dudas y fomentando la participación de los distintos miembros del grupo. Pasado cierto tiempo, se volverá al grupo general y se comentarán los resultados obtenidos. El docente dejará que los estudiantes expresen sus propias soluciones y fomentará el debate, resaltando las ideas clave de la conversación y regulándola.

En base a la actividad anterior, el docente introducirá terminología que permita institucionalizar las ideas ya propuestas durante el debate. Esto se complementará con el uso de modelos gráficos interactivos (normalmente, applets de GeoGebra) que permitan dar sentido a los símbolos y operaciones matemáticas relacionadas, así como fomentar la traducción entre diferentes tipos de representación de los números racionales. Si bien el docente explicará cómo usar estas herramientas, serán los estudiantes quienes las manipulen para resolver actividades sencillas que permitan asentar los conceptos. Mediante la plataforma GeoGebra Classroom, el docente pedirá al alumnado interactuar con estos modelos y podrá observar la actividad de los estudiantes en tiempo real, recopilando información en torno a posibles errores conceptuales, y proponiendo más adelante nuevas actividades que los resuelvan.

Las actividades realizadas con los distintos modelos interactivos se acompañarán de preguntas que relacionen el modelo gráfico con el numérico, y permitan definir estrategias a la hora de trabajar de manera simbólica. En el caso de las operaciones, también se potenciará la estimación del resultado y del error cometido previamente al cálculo exacto, a fin de desarrollar el sentido numérico y del tamaño relativo de una fracción.

Una vez el alumnado haya planteado este tipo de problemas o actividades, el docente introducirá algoritmos clásicos que permitan automatizar diferentes procesos, como la simplificación, reducción a común denominador, u operaciones entre fracciones. Dichos algoritmos se consolidarán mediante algunos ejercicios procedimentales.

Por último, los estudiantes deberán relacionar los contenidos de la sesión con el problema inicial, o con nuevos problemas finales. El docente dará pautas básicas que permitan estructurar los problemas, encontrar soluciones y evaluar la amplitud de dichas soluciones (escribir los datos, definir e interpretar un modelo de solución, escribir un planteamiento, etc.).

Finalmente, el uso del idioma variará según la sesión. En total, y cumpliendo con lo establecido en las Instrucciones de 7 de junio de 2018, se dedicará al menos un 50% del tiempo en un segundo idioma. El resto del tiempo variará según el nivel de inglés del alumnado y su interés. En cualquier caso, todos los materiales se presentan en inglés, salvo en la sesión 8, y se valorarán las intervenciones en un segundo idioma. En general, se establecen las siguientes pautas de uso de idiomas:

- El docente utilizará el inglés a la hora de plantear los problemas, proponer ejemplos o institucionalizar ideas tras los problemas propuestos, así como en la resolución de dudas sencillas; se utilizarán frases cortas y sencillas, así como un vocabulario fijo que no dé lugar a confusión en el alumnado. El castellano se utilizará para resolver dudas, realizar aclaraciones o desarrollar argumentos complejos, así como para reforzar ideas principales.
- El alumnado recibirá la mayor parte de las actividades y materiales en inglés (salvo aquellas que puedan resultar complicadas de explicar o entender, o estén muy basadas en la comunicación y debate). En algunas actividades se les proporcionarán frases cortas que le permitan también dar una solución en inglés. Podrá utilizar el castellano para debatir con los compañeros, exponer y preguntar dudas.

5.6 Motivación al estudio

Utilizaremos las siguientes estrategias de motivación, dirigidas a que el alumnado disfrute en su propio aprendizaje y tome conciencia de la importancia de dicho aprendizaje en su vida personal:

- La mayor parte de los conceptos se introducirán mediante situaciones que resulten cercanas al alumnado. Muchos de estos problemas pueden resolverse con el propio pensamiento informal de los estudiantes, y ponen de relieve la necesidad de un lenguaje que permita expresar ideas y desarrollarlas para resolver problemas más complejos.
- Gran parte de las actividades se harán en parejas o grupos pequeños. Esto ayudará a que, en una situación de aislamiento, el alumnado mantenga contacto con sus compañeros y haya una gran interacción social. Además de ello, la realización de trabajos grupales permite que el alumnado proponga estrategias y resuelva dudas en un entorno más cercano y amigable que la clase completa.
- Gran parte de las actividades van acompañadas de modelos gráficos y applets interactivos. La manipulación de estos objetos virtuales facilita la búsqueda de estrategias informales, hace que los estudiantes vean un mayor sentido a aquello con lo que trabajan, y puedan servir como referencia a la hora de trabajar con otras representaciones más abstractas, como la numérica. Al poder jugar con estos materiales, y dar sentido a las actividades, los estudiantes se sienten más implicados en su aprendizaje.
- Se plantean preguntas y paradojas que suscitan la curiosidad y muestran parte de la historia de la matemática en contexto.

5.7 Atención a la diversidad

Como mencionamos al hablar del alumnado, los ratios son bajos debido a la detección de alumnos con dificultades de aprendizaje, pero se comprueba que el alumnado tiene una gran capacidad de resolver problemas intuitivos cuando éstos se sitúan en un contexto cercano. Los problemas iniciales, situados en este contexto, permiten que el alumnado haga uso de esta capacidad para obtener resultados básicos, y se impliquen en el aprendizaje. De la misma forma, los modelos gráficos e interactivos permiten que el alumnado visualice las distintas ideas, sirviendo como apoyo a la hora de trabajar en situaciones más abstractas.

Se realizarán actividades de consolidación que apunten a resolver los errores más comunes entre el alumnado. Estos errores se detectarán mediante la observación del trabajo de los estudiantes, gracias a la plataforma GeoGebra Classroom, y a los resultados generales que hemos desarrollado en el marco teórico (errores en las operaciones, falta de interpretación de los algoritmos, dificultades a la hora de representar en la recta numérica, etc.).

Junto a lo anterior, se llevará un seguimiento de cada estudiante mediante la observación y la entrega de portafolios. Al evaluar estos últimos, a lo largo de toda la unidad, se plantearán nuevas actividades personalizadas, dirigidas a resolver las dificultades que se hayan observado, proporcionar pasos intermedios en la resolución de actividades previas, o plantear actividades de profundización. Los estudiantes con mayores dificultades llevarán un seguimiento más constante, y se fomentará que comenten dudas con sus compañeros de grupo.

Debido a la existencia de un estudiante con disortografía leve, se ha intentado promover en la medida de lo posible todos los aspectos visuales de los conceptos que se tratan. Las actividades se explicarán de forma oral durante las sesiones, y se dará importancia al debate tras las actividades. Por último, el uso de ordenador presenta la ventaja de que permite ampliar o reducir el tamaño de las letras que se muestran, facilitando la visualización para este estudiante.

5.8 Recursos

- *Cuaderno, bolígrafo y calculadora* de cada estudiante.
- Disponibilidad de un *ordenador o tablet*, así como acceso a internet, por cada alumno. Utilizaremos aplicaciones y páginas web multiplataforma que funcionan correctamente en ambos dispositivos.
- *Plataforma virtual Moodle del centro*, como plataforma donde alojar el curso. Aquí se subirán todos los materiales, enlaces a actividades y videollamadas. Esta plataforma contendrá también cuestionarios autoevaluables que devuelvan feedback instantáneo, y almacena y organiza los resultados de estas actividades, facilitando la información tanto al docente como al propio alumno. La plataforma estará activa durante todo el día, de modo que el alumnado puede acceder a los distintos recursos en cualquier momento.
- *Cuenta del centro de cada alumno*. Permitirá el uso del correo electrónico como forma de contacto con el docente, y dará acceso a algunas de las actividades que se realizarán en clase, al estar vinculado con Google Suite.
- *Plataforma BigBlueButton*. Se trata de una plataforma de videollamadas integrada en Moodle, que se utilizará para realizar las sesiones síncronas con el alumnado. Esta plataforma permite la creación de salas de trabajo en grupo, el uso de pizarras colaborativas, tanto a nivel de grupo como en la clase global, y la presentación de contenidos multimedia (vídeos, imágenes, presentaciones, etc.). También permite al docente compartir su pantalla.
- *Plataforma DESMOS*. Esta página web permite la creación de actividades interactivas para el alumnado. Los estudiantes pueden acceder a las actividades utilizando su cuenta del centro.
- *Applets de GeoGebra*. Aplicaciones que permiten visualizar diversos conceptos relacionados con las fracciones e interactuar con ellos. Salvo un applet, obtenido de la web, los demás applets han sido diseñados como parte de este trabajo. Estos applets se pondrán a disposición del alumnado más allá de las sesiones síncronas mediante enlaces en Moodle. Todos los applets, junto a una descripción y justificación de su valor educativo pueden encontrarse en el Anexo III.

- *GeoGebra Classroom*: Esta página web permite plantear actividades en GeoGebra de manera que el docente pueda visualizar la actividad de cada estudiante en su pantalla simultáneamente, y obtener así información sobre los errores, dificultades y resultados que puedan ir surgiendo. Para acceder, los estudiantes sólo necesitan un enlace que el docente proporcionará para cada actividad.

5.9 Diseño y temporalización de las sesiones

Describimos a continuación las diferentes sesiones. Los applets utilizados pueden encontrarse en el Anexo III junto a una descripción y justificación de su uso. Todas las sesiones diseñadas en GeoGebra Classroom pueden encontrarse en este libro de GeoGebra, aunque también se incluyen enlaces en cada sesión. Además, se incluyen imágenes de todas estas actividades en el Anexo VIII.

En la mayoría de las sesiones se utilizará el inglés según lo expuesto en la metodología. No obstante, en algunas sesiones se especifican algunos cambios en su uso, debido al carácter de la sesión.

Sesión 1: Sesión de introducción, evaluación inicial y presentación del material

Contenidos: La primera sesión consistirá en la realización de una prueba inicial, y la introducción a la metodología, materiales y evaluación de la unidad.

La sesión comenzará con la introducción de la plataforma Moodle y BigBlueButton. Se comentarán las características más importantes (localización de los materiales, uso de la pizarra en BigBlueButton, realización de cuestionarios en Moodle, o ventana de calificaciones). Tras esto, se introducirán brevemente los contenidos de la unidad, la metodología de trabajo, el uso del segundo idioma y las herramientas de evaluación. Para finalizar, se procederá a realizar una prueba escrita individual mediante un cuestionario en Moodle.

Este cuestionario puede encontrarse en el Anexo I, y su interés se comenta en el apartado 5.11 de evaluación.

Actividad: Puede accederse a esta actividad desde el siguiente enlace.

Una vez la prueba inicial se haya completado, el docente introducirá la plataforma GeoGebra Classroom, y se comenzará a plantear una actividad de introducción a las fracciones como medida y parte-todo. Para ello, utilizaremos la virtualización de las regletas de Cuisenaire mediante un applet de GeoGebra. Las regletas aparecen con distintos tamaños en referencia a un rectángulo gris que se toma por unidad. Se comenzará identificando cada pieza con una fracción unitaria. Una vez se haya podido dar un nombre a cada pieza, se pasará a considerar fracciones no unitarias. Esto permitirá a los estudiantes recordar ciertas ideas ya vistas durante la escuela primaria, y servirá para establecer un punto inicial de referencia, de forma que todos los estudiantes partan de un lugar común.

Junto a esto, se proporcionará a los estudiantes un documento en PDF que puede ser impreso y recortado para utilizar las piezas de forma física. No obstante, ante la posibilidad de que algunos estudiantes no tengan acceso a una impresora, y por facilidad a la hora de observar el trabajo de los estudiantes, utilizaremos como referencia el applet virtual. Estas piezas en PDF pueden encontrarse en el Anexo II del Anexo IX (unidad didáctica original).

Durante esta actividad, el docente observará la competencia digital de los estudiantes, y si poseen recursos adecuados (conexión de internet, micrófono, etc.), a fin de evaluar si es necesario realizar cambios menores sobre los applets o las actividades, y comprobar qué tipo de conocimientos digitales podrían hacer falta para que las clases se desarrollen adecuadamente.

Se utilizará el castellano a lo largo de toda la sesión, a fin de que las bases de la unidad resulten claras para todos los estudiantes.

Sesión 2: Vocabulario básico, la fracción como reparto y parte-todo

Contenidos: Esta sesión introducirá vocabulario específico para los nombres y partes de las fracciones. Junto a esto, propondremos por grupos variaciones de un problema de reparto equitativo, a fin de introducir las fracciones de manera útil y en un contexto cercano. La actividades pueden encontrarse en el siguiente enlace.

Actividad 1: Completaremos la actividad de la sesión anterior. De nuevo se introducirán las regletas de distintos tamaños, pero en este caso daremos sus nombres en inglés. Los estudiantes deberán completar un cuadro relacionando las fracciones unitarias, sus nombres en inglés, y las regletas correspondientes.

Para asentar este vocabulario, el docente distribuirá la clase en grupos. En cada grupo un estudiante comenzará por proponer una fracción utilizando las regletas, y retará a un compañero suyo a darle nombre. Una vez acierte, será éste quien proponga una nueva fracción con las regletas. Se motivará el uso del cuadro completado en la parte anterior de la actividad como referencia para evaluar las soluciones.

Actividad 2: En la segunda mitad de la sesión plantearemos un problema de reparto por grupos. En este problema, un cocinero recibe un pedido para realizar y repartir, de manera equitativa, los 21 bocadillos que se llevarán a tres excursiones escolares, con 4, 5, y 6 estudiantes, respectivamente. Además de realizar el reparto, se pide cuestionar si dicho reparto es justo o qué ocurriría si, en vez de 21, hubiese 13 bocadillos.

Se dejará que los estudiantes desarrollen soluciones intuitivas, para más tarde relacionar dichas soluciones con las fracciones a las que hacen referencia. Las estrategias seguidas y los resultados obtenidos se pondrán en común al final de la sesión. Cada estudiante deberá completar individualmente el problema, y añadirlo a su portafolio.

Sesión 3: Fracciones impropias y números mixtos

Contenidos: Esta sesión irá dirigida a introducir las fracciones impropias y su expresión como números mixtos. Esto se trabajará mediante tres interpretaciones: parte-todo en un modelo continuo, medida y cociente indicado. Se pondrá también énfasis en la traducción entre distintas representaciones: verbal, gráfica y numérica. Las actividades pueden encontrarse en el siguiente enlace.

Actividad 1: La sesión comenzará con el planteamiento de un problema por grupos: dada la posibilidad de comprar porciones de pizza (a 1 euro) o pizzas completas (a 6 euros), si una pizza completa trae 8 porciones, ¿cómo podemos organizarnos para comprar las pizzas?

El problema se ha elegido porque muestra implícitamente la equivalencia entre números mixtos y fracciones impropias, y está situado en un contexto cercano al alumnado.

Se dejará tiempo para resolver el problema (unos diez minutos), y finalmente un miembro de cada grupo expondrá su solución. Junto a ello, el docente preguntará si se encuentra alguna relación con las fracciones en el problema. De haber soluciones diferentes, se debatirá cuál es más apropiada. Cada estudiante deberá terminar de resolver el problema, e incluirlo en su portafolio.

Exposición y actividad 2: En base al problema, el docente introducirá el concepto de número mixto, fracción propia y fracción impropia, utilizando como apoyo applets de GeoGebra que muestran esta relación. La utilidad de estos applets reside en que permiten coordinar ambas expresiones entre sí y con distintos modelos de representación. Se pedirá al alumnado que represente algunas de estas fracciones utilizando este applet, a fin de consolidar los conceptos introducidos.

Finalmente, se planteará el problema de cómo es posible traducir entre estos dos tipos de expresión de manera numérica. Para mostrar este algoritmo se utilizarán dos nuevos applets que muestran por pasos cómo funciona el algoritmo de traducción entre uno y otro, utilizando como referencia el modelo de área circular.

La sesión se realizará en inglés, si bien la presentación de las soluciones del alumnado se realizará en castellano, a fin de facilitar la justificación y fomentar el debate en el grupo.

Sesión 4: Posición sobre la recta real y relación con los decimales

Contenidos: En esta sesión trabajaremos la representación sobre la recta real, y su traducción con la representación numérica y verbal. Para ello, comenzaremos por posicionar números naturales sobre la recta, para más tarde modificar este problema hacia el caso de los racionales. Esto también se utilizará para relacionar las fracciones con los decimales. Por último, se plantea una actividad de búsqueda de información sobre las paradojas de Zenón. Las actividades pueden encontrarse en el siguiente enlace.

Actividad 1: Comenzaremos la sesión planteando un ejercicio consistente en posicionar números naturales sobre la recta numérica mediante un applet de GeoGebra. Tras esto, se plantea el mismo problema en una recta numérica cuyos extremos son 10 y 11.

Se dejará que cada grupo busque una primera solución, y se formen debates en torno a qué números pueden ocupar cada hueco. Una vez hecho esto, cada grupo comentará brevemente sus conclusiones en el grupo general, y finalmente el docente resaltará los puntos clave de dichas conclusiones, aludiendo a la posibilidad de utilizar números decimales o fracciones.

En particular, GeoGebra transforma automáticamente fracciones a decimales, de modo que se planteará la relación entre estas dos expresiones de los números racionales, y se introducirá la fracción como una división que no se ha llevado a cabo.

Actividad 2: Al finalizar esta actividad se pasará a colocar distintas fracciones sobre una recta numérica con extremos en cero y dos. Esta actividad puede resultar compleja para los estudiantes, y decidimos enfrentarla de manera directa y comentar los resultados para aclararla.

Actividad 3: Por último, se planteará una tarea grupal en torno a las paradojas de Zenón. Para ello, se pedirá buscar información sobre dichas paradojas, y desarrollar la paradoja de la dicotomía, comentándola con el resto de compañeros. Utilizando el applet anterior, se pedirá representar sobre la recta las distintas posiciones que aparecen en la paradoja. Por último, se planteará en cada grupo un debate en torno a la paradoja, en el que uno de los miembros deberá defenderla, y otro criticarla, mientras que los demás estudiantes apuntan las ideas clave del debate.

El docente comprobará el trabajo de los estudiantes y guiará su desarrollo, desplazándose entre las distintas salas virtuales. Los estudiantes contarán también con el apoyo de la pizarra virtual en BigBlueButton para comunicar y expresar sus ideas.

Mediante esta actividad fomentamos la búsqueda de información, comprensión lectora, el debate entre el propio alumnado, la modelización, y la traducción entre distintas representaciones de las fracciones.

Sesión 5: Comparaciones relativas y fracciones equivalentes

Contenidos: En esta sesión introducimos la comparación de fracciones. Para ello, planteamos un análisis de las estadísticas de un partido de baloncesto, en el que la fracción aparece como razón. Tras esto, comparamos fracciones utilizando la recta numérica y regletas de Cuisenaire, e introducimos las fracciones equivalentes y la regla de los productos cruzados. Se puede acceder a las actividades mediante el siguiente enlace.

Actividad 1: La clase comenzará con el planteamiento de un problema en grupos: se plantean distintas preguntas sobre las estadísticas de puntos en un partido de baloncesto, dados el número de tiros de cada tipo (tiros libres, tiros de campo y triples) y el número de aciertos.

El objetivo de esta actividad es comprobar que cada fracción mide aquí la "puntería" de cada equipo, y encontrar formas intuitivas de justificar qué fracción es mayor en cada caso, tomando como referencias fracciones sencillas (por ejemplo ½, ¼, ¾, etc.) De la misma forma, se espera que surja la idea de fracción equivalente, a través de expresiones coloquiales como "la mitad de los tiros" o "uno de cada tres".

Actividad 2: Tras este intercambio de ideas, el docente concluirá la importancia de utilizar la misma unidad a la hora de comparar fracciones. Utilizaremos las regletas de Cuisenaire y la recta numérica para realizar comparaciones de distintas fracciones, y buscar estrategias que permitan realizar estas operaciones a través de los símbolos. En particular, se pedirá comparar en algunos casos fracciones equivalentes, a fin de introducir este concepto.

Exposición y actividad 3: El docente introducirá la idea de fracción equivalente como el caso en que dos fracciones toman el mismo valor aun poseyendo expresiones distintas. De nuevo, utilizaremos un nuevo applet de GeoGebra que ilustra de forma gráfica la obtención de fracciones equivalentes mediante la subdivisión de partes en un modelo continuo.

En relación con los problemas anteriores, se introducirá finalmente la regla de los productos cruzados como forma de comparar fracciones y detectar fracciones equivalentes, y se propondrá un ejercicio para comprobar esta regla.

Sesión 6: Actividad DESMOS y refuerzo de los conceptos vistos

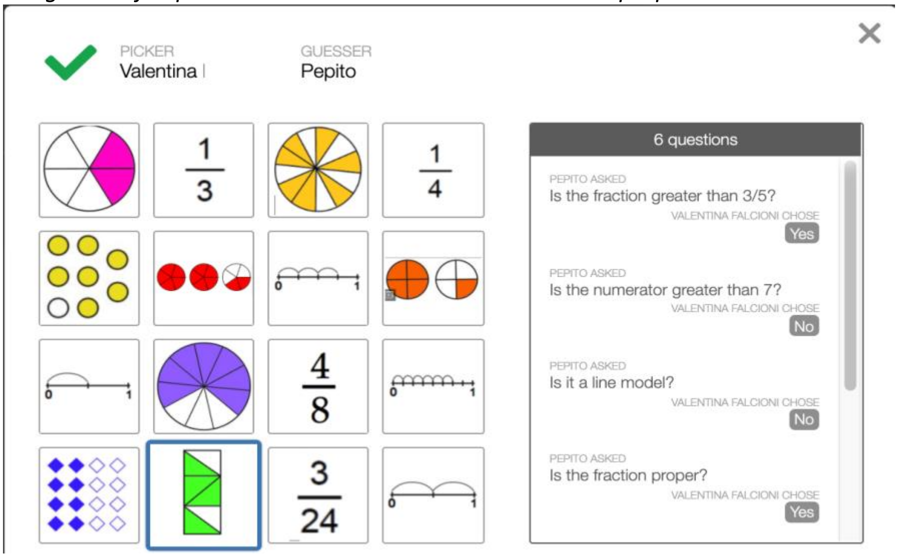
Contenidos: Durante esta sesión trabajaremos el vocabulario en inglés relacionado con las fracciones, y la traducción entre distintas representaciones mediante un juego online por parejas. Tras esto, según sea conveniente, se aclararán dificultades que el docente haya percibido o se realizará un mapa conceptual para organizar las ideas. Para acceder a la actividad es necesario estar registrado en la plataforma *DESMOS*. Esto puede hacerse directamente a través de la cuenta del centro de cada estudiante. La actividad puede encontrarse en el siguiente enlace.

Actividad 1 (DESMOS): Planteamos un juego online por parejas. Este juego procede de la siguiente forma: cada pareja recibe dieciséis imágenes de fracciones expresadas según diferentes modelos (área, lineal, decimales, verbal o numérico). Un miembro de cada pareja elige una de estas representaciones, y el otro miembro debe realizar preguntas (en inglés) de sí o no para encontrar qué fracción ha elegido su compañero. El rol de cada alumno cambia automáticamente en cada ronda que se juega. Un ejemplo de una ronda de juego puede encontrarse en la Figura 14.

La sesión comenzará con una explicación del juego por parte del docente, y un ejemplo con un estudiante para comprobar la dinámica. Una vez hecho esto, el docente dará una serie de posibles preguntas en inglés que pueden utilizarse, y motivará al alumnado a que desarrolle nuevas preguntas y pida ayuda si necesita de una traducción adecuada de estas preguntas.

Figura 14

Imagen de ejemplo de la actividad DESMOS. Elaboración propia.



Cada pareja realizará rondas durante 10 minutos. Tras este tiempo, las parejas se crearán de nuevo, y se propondrán nuevas imágenes. Cada alumno debe llevar un recuento de las preguntas que ha realizado y cuántas preguntas ha necesitado para encontrar la fracción, a fin de comprobar qué preguntas son las más efectivas.

Al final de la actividad se planteará un debate en castellano, en torno a qué preguntas son las más efectivas y a qué se debe dicha efectividad. Esta actividad ocupará los primeros 40 minutos de la sesión.

Recapitulación: El tiempo restante en esta sesión se utilizará para aclarar dudas conceptuales que se hayan detectado en distintos alumnos, repasar lo visto en las sesiones anteriores, y corregir algunos de las actividades y problemas realizados.

Sesión 7: Encontrando fracciones equivalentes. Simplificación y fracción irreducible

Contenidos: Esta sesión irá dirigida a encontrar fracciones equivalentes, e introducir la simplificación y las fracciones irreducibles. También trabajaremos la interpretación de la fracción como razón de proporcionalidad y relación parte-parte. Las actividades pueden encontrarse en el siguiente enlace.

Actividad 1: De manera similar a la sesión 5, planteamos un nuevo problema en el que la fracción aparece como razón. Dados dos vasos de leche con cacao, se pedirá medir “qué mezcla será sabrá más a chocolate” para distintos volúmenes de cada líquido (comparación), y cómo es posible obtener mezclas que tengan el mismo sabor (fracciones equivalentes).

Para este problema se ha realizado un applet en GeoGebra que muestra ambos vasos y permite modificar las cantidades de leche y cacao, dando una interpretación visual de la proporción de cacao y de leche en la mezcla, y permitiendo relacionarlos con las fracciones en cada caso, así como con la proporción leche : cacao. Este applet puede encontrarse en el Anexo III, número 4.

Se expondrán las distintas soluciones, y el docente pedirá que se complete la actividad y se añada al portafolios.

Actividad 2: Seguidamente, se presentará una actividad consistente en buscar fracciones equivalentes utilizando las regletas de Cuisenaire, a fin de que los estudiantes experimenten y comprueben cómo se relacionan los nuevos numeradores y denominadores.

Exposición y Actividad 3: Utilizando un applet de GeoGebra, el docente introducirá formas de encontrar fracciones equivalentes dividiendo piezas o combinándolas. Se introducirá la simplificación de fracciones junto a la fracción irreducible, y se pedirá comprobar cuáles de las fracciones encontradas en la actividad anterior corresponden a simplificaciones, así como simplificar otras nuevas.

Sesión 8: Puzzle de Brousseau y pensamiento proporcional

Contenido de la sesión: En esta sesión trabajaremos el pensamiento proporcional del alumnado. Para ello, plantearemos un puzzle de Brousseau y una actividad grupal en la que se pide calcular las cantidades para elaborar una receta según el número de comensales. Se ha decidido realizar esta sesión en castellano, buscando que los estudiantes puedan expresar sus estrategias y conclusiones de manera más espontánea en ambas actividades. Las actividades pueden encontrarse en el siguiente enlace.

Actividad 1 (Puzzle de Brousseau): Usualmente, esta actividad se realiza mediante el recorte de una serie de piezas sobre un papel. Dada la situación de aprendizaje a distancia, se ha intentado virtualizar esta actividad, y diseñado un applet de GeoGebra que presenta algunas diferencias respecto al diseño original.

La actividad consta de tres partes. En primer lugar, se pide calcar sobre un panel de GeoGebra una imagen del puzzle de Brousseau que se da al alumnado. Una vez finalizado esto, se pide una segunda actividad consistente en ampliar este puzzle a uno proporcional, en el que un lado, que anteriormente medía 4, pase a medir 7. Esto puede hacerse bien modificando los puntos en una imagen ya dada por el docente, o creando desde cero un nuevo puzzle, de forma análoga a la actividad anterior. Finalmente, se incluye un solucionario que permite ampliar la figura y muestra el papel que juega la fracción como un operador que amplía o reduce cada segmento.

Actividad 2: Tras finalizar la actividad, se planteará por grupos un problema donde la fracción aparece de nuevo como operador. Se pide a cada grupo que elija su plato favorito, y encuentre una receta de entre cuatro y siete ingredientes, para cuatro personas. Con esta receta, se pedirá determinar las cantidades necesarias de cada ingrediente para distintos números de comensales.

Mediante este problema, promovemos la búsqueda de información, motivamos al alumnado en un contexto que le es familiar, y fomentamos que utilice su pensamiento informal para desarrollar la idea de proporcionalidad, introduciendo la interpretación de la fracción como un operador de manera implícita.

Cada grupo deberá plantear esta actividad y buscar una estrategia. Al comienzo de la siguiente sesión, un miembro de cada grupo, a escoger por el docente, deberá explicar la receta elegida, el resultado y la estrategia seguida para resolver el problema.

Sesión 9: La fracción como operador

Contenidos: En esta sesión trabajamos la interpretación de la fracción como operador, y damos significado a la expresión “la fracción de un número”. Las actividades pueden encontrarse en el siguiente enlace.

Continuación de la actividad anterior: Comenzaremos la sesión dando tiempo para continuar la actividad planteada en la sesión anterior. Tras un breve período de tiempo, cada grupo deberá explicar su receta al resto de la clase, así como la estrategia seguida a la hora de resolver el problema. De haber distintas soluciones, se planteará un debate en torno a si son o no equivalentes y/o correctas. Por último, cada estudiante deberá añadir a su portafolio el cuadro completo con su receta.

Actividad 1: A través del debate anterior, el docente introducirá la interpretación de la fracción como un operador multiplicativo. Esto se ilustrará poniendo como ejemplo el llenado de vasos de agua de distinto volumen. Se ha diseñado un nuevo applet de GeoGebra que permite modificar los valores de la fracción y tamaño del vaso, realizando los correspondientes cambios sobre la imagen del vaso. Este applet puede encontrarse en el Anexo III, número 8.

Se pedirá a los estudiantes resolver distintos problemas relacionados con este vaso: llenar una cantidad de agua dada, calcular qué cantidad de agua tiene una determinada fracción del vaso, o cuánto debe medir el vaso para que una fracción dada dé lugar a una cantidad determinada.

Este planteamiento permite trabajar el mismo problema desde todas sus perspectivas: todos los problemas involucran tres datos (parte, todo y fracción), y se pide obtener, a partir de dos de ellos, el restante. En particular, potenciamos el pensamiento algebraico de los estudiantes.

Sesión 10: La suma y resta de fracciones: suma y resta con igual denominador

Contenidos: En esta sesión se introducirá la suma y resta de fracciones con igual denominador, inicialmente de forma gráfica, y tras esto simbólicamente. Para ello, trabajaremos con modelos de parte-todo y medida, basados en la división de rectángulos y en la recta numérica. Las actividades pueden encontrarse en el siguiente enlace.

Actividad 1: Comenzaremos trabajando la suma de fracciones con igual denominador. Para ello utilizaremos las regletas de Cuisenaire. Se introducirá la suma como el resultado de posicionar una pieza tras de otra, y se pedirá a los estudiantes que representen, utilizando las regletas algunos ejemplos de sumas.

Actividad 2: Planteamos una actividad análoga a la anterior, en este caso con la resta. Los estudiantes deberán dar sentido a lo que se entiende por esta operación en términos de las regletas, interpretando los resultados y traduciéndolos a los símbolos correspondientes.

Actividades 3 y 4: Realizamos actividades análogas a las anteriores, en este caso sobre la recta numérica. Se dejará que los estudiantes interpreten el significado de ambas operaciones sobre este modelo, y evalúen si los resultados obtenidos son coherentes con los de las actividades anteriores.

Por último, se comentarán las conclusiones obtenidas en cuanto a los símbolos correspondientes, y se propondrá operar fracciones sencillas utilizando únicamente los símbolos.

Se dejará el tiempo restante de clase para resolver dudas o trabajar conceptos que hayan resultado conflictivos.

Dado que esta sesión involucra un vocabulario muy básico, y no presenta demasiada dificultad, se intentará que toda la comunicación se realice en inglés. El docente introducirá vocabulario sencillo sobre las operaciones (términos como *adding, subtracting, plus, minus, equals*, etc.) así como de las acciones que se pueden realizar sobre las regletas (términos como *moving, placing, putting*, etc.).

Sesión 11: La suma y resta de fracciones: estimación, reducción a común denominador y operaciones con números mixtos

Contenidos: En esta sesión introducimos la estimación en la suma de fracciones con distinto denominador, así como la reducción a común denominador como forma de sumar o restar de manera exacta dos fracciones. Una vez hecho esto, introducimos también las operaciones con números mixtos. Las actividades pueden encontrarse en el siguiente enlace.

Actividad 1: De la misma forma que en la sesión anterior, comenzaremos planteando sumas y restas de distintas fracciones sobre las regletas de Cuisenaire, si bien ahora utilizaremos piezas de distinto tamaño. En caso de no poder obtener una solución exacta, se pide a los estudiantes acercarse lo máximo posible mediante otra fracción.

Actividad 2: De manera análoga, se pide que se resuelvan ciertas operaciones sobre la recta numérica, acercándose tanto como sea posible a la solución real.

Exposición: En base a los resultados de estas actividades, el docente introducirá la necesidad de buscar un denominador común para operar dos fracciones. Preguntando constantemente a los estudiantes, y acompañándose de imágenes, se irán planteando sumas cada vez más complejas, comenzando por un caso en que los denominadores sean iguales, tras ello otro en el que uno de los denominadores sea múltiplo del otro, y finalmente en que sea necesario buscar un denominador común para ambos. El docente introducirá la idea de que el nuevo denominador debe ser un múltiplo común a ambos, e intentará que surja el concepto de mínimo común múltiplo de forma natural.

Actividad 3: Se pedirá a los estudiantes realizar una serie de operaciones planteadas simbólicamente. Podrán servirse de las applets anteriores para comprobar cómo funciona el algoritmo, y más adelante también para evaluar las soluciones obtenidas.

Actividad 4: Por último, se plantearán una serie de operaciones simbólicas con números mixtos. Dado que los applets anteriores no son suficientes para realizar este tipo de operaciones, se fomentará el uso de dibujos, y cada grupo deberá dotar de sentido a los símbolos que aparecen y elaborar estrategias para operar estas expresiones.

Sesión 12: Refuerzo de todo lo anterior, resolución de problemas de sumas y restas con fracciones

Contenidos: Dedicamos la última sesión a resolver una serie de problemas que involucran algunas sumas y restas con fracciones. De este modo volvemos a trabajar lo visto en la sesión anterior, añadiendo además contextos que den sentido a lo que se está realizando y permitan evaluar el planteamiento y solución obtenidas. Las actividades pueden encontrarse en el siguiente enlace.

Actividad 1: Se plantea un problema dirigido a trabajar el pensamiento proporcional: suponiendo que el mundo tuviera mil personas, se plantean preguntas sobre cuántas personas vivirían en Asia, Europa o España, o cuántas tendrían acceso a agua potable. De la misma forma, se pide encontrar fracciones sobre el problema, y aproximarlas por otras que permitan visualizar mejor la situación.

Actividad 2: Se plantea un problema en torno al número de huéspedes en un hotel, dados en forma de fracciones del total. Se pide encontrar el número mínimo de huéspedes que pueden dar lugar a este tipo de datos (es decir, encontrar un denominador común a las fracciones que aparecen). Además, se proponen fracciones que suman más que uno, lo cual no tiene sentido en el problema que se plantea. Se busca que los estudiantes detecten este error en relación con el problema planteado.

Ambos problemas se debatirán durante la sesión, y cada grupo expondrá las estrategias que haya seguido, o conclusiones a las que haya llegado. Finalmente, los estudiantes deberán rellenar la rúbrica de autoevaluación y un cuestionario de evaluación del proceso, e incluir ambos archivos en su portafolio.

5.10 Evaluación

El objetivo de la evaluación será la recopilación de información de diversa índole en torno al desarrollo de las sesiones, los errores y dificultades de los estudiantes, y cómo es posible resolverlos. La información recopilada se utilizará para realizar pequeñas modificaciones en las sesiones que permitan solventar algunas dificultades, y presentar a los estudiantes propuestas que permitan ampliar su conocimiento o resolver algunos conflictos cognitivos.

Los aspectos a evaluar se rigen por los criterios de evaluación establecidos en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, y las competencias asociadas a dichos criterios. Para la evaluación de estas competencias, en el apartado 5.4 se establecieron una serie de indicadores de logro, que llevaremos a la práctica mediante distintas rúbricas, correspondientes a los Anexos IV, V y VI. Las rúbricas estarán disponibles para los estudiantes en la página de Moodle del curso, de modo que éstos conozcan qué se va a evaluar y qué se espera de ellos durante las sesiones. Planteamos a continuación las distintas herramientas a utilizar.

5.10.1 Evaluación de los estudiantes

Evaluación inicial

En la primera sesión se realizará una evaluación inicial consistente en dos partes:

- Una prueba escrita en la que aparecen distintas actividades a resolver, dirigidas a comprobar el nivel inicial del alumnado en distintos aspectos de las fracciones, y si es necesario reforzar conceptos o adaptar algunas de las actividades. Esta prueba puede encontrarse en el Anexo I.
- Una actividad de clase que permita comprobar la situación tecnológica de los estudiantes, en cuanto a conexión, dominio del ordenador, etc., así como su actitud.

La prueba escrita consta de diez preguntas sencillas y clasificadas en torno a los siguientes ítems, que hemos considerado básicos para la realización y seguimiento de las actividades que se llevarán a cabo en la unidad didáctica, y que nos ofrecen una primera impresión de las posibles dificultades o errores de concepto que los estudiantes puedan poseer.

1. Visión general de las fracciones.
2. Capacidad de interpretar representaciones (discretas y continuas).
3. Modelización y resolución de problemas.
4. Expresión y comprensión lectora.
5. Sentido numérico.
6. Cálculo sencillo.

Observación de clase

Utilizaremos para ello la rúbrica incluida en el Anexo IV. El docente podrá comprobar en tiempo real el trabajo de los estudiantes durante las sesiones mediante la plataforma GeoGebra Classroom. De este modo, estudiará qué tipo de soluciones dan a las distintas actividades o cómo manipulan los applets para lograr sus objetivos. En base a ello, hablará con los distintos estudiantes (o con el grupo global) para aclarar conceptos o plantear actividades que resuelvan estos problemas.

El docente también comprobará el desarrollo de los distintos grupos, regulando el debate y resolviendo pequeños conflictos, en caso de haberlos.

Autoevaluación y evaluación de grupo

En la sesión 6, y en la sesión final, los estudiantes deberán rellenar una rúbrica de autoevaluación, en la que deberán comprobar en qué punto de su aprendizaje se encuentran, justificando tanto los aspectos positivos como negativos, y viendo qué pueden trabajar para resolver posibles dificultades. Esta rúbrica puede encontrarse en el Anexo VI.

En esta misma rúbrica, también se incluyen algunos puntos para evaluar el trabajo del grupo y la comunicación dentro de éste.

Portafolio

Cada estudiante deberá contar con una carpeta en su dispositivo con los siguientes archivos:

- Un archivo de texto con los enlaces de GeoGebra Classroom a las distintas sesiones realizadas, de manera que el estudiante siempre pueda acceder a su actividad durante las sesiones.
- Imágenes del cuaderno con los problemas planteados en clase, desarrollados y resueltos.
- Las posibles rúbricas que se hayan rellenado y los distintos archivos que puedan haberse necesitado para resolver algunos problemas (fuentes de información, vídeos, documentos, etc.).

Al final de cada sesión (a partir de la tercera) el docente pedirá a cinco estudiantes la entrega del portafolio antes de la siguiente sesión; comprobará su contenido y, de haber resultados incorrectos, planteará nuevas preguntas y anotaciones que ayuden al estudiante a ver el problema de distinto modo, y resolver un posible conflicto cognitivo. De la misma forma, se podrán plantear pequeñas ampliaciones a las actividades que generen una mayor abstracción, o permitan profundizar.

Dado que las clases son de aproximadamente 17 estudiantes, se espera que al final de la unidad cada estudiante haya entregado su portafolio al menos dos veces.

Al final de la unidad, los estudiantes enviarán al docente todos los portafolios, y éste comprobará que las distintas anotaciones hayan sido resueltas y aparezcan todos los documentos. Por último, el docente realizará una evaluación final del portafolio utilizando la rúbrica incluida en el Anexo V.

5.10.2 Evaluación del proceso

A la información recogida mediante las herramientas anteriores, añadimos el siguiente cuestionario.

Cuestionario de evaluación del proceso

En la última sesión, los estudiantes deberán rellenar un cuestionario puntuando de 0 a 5 el desarrollo de la unidad, y añadiendo un comentario sobre qué ha sido de su agrado, qué no, y posibles propuestas de mejora. Dicho cuestionario se incluye en el Anexo VII.

Al final de la unidad, el docente utilizará toda la información recogida para evaluar el desarrollo de la unidad didáctica. En particular, se evaluarán:

- *Los materiales creados en GeoGebra*: atendiendo a si son amigables para los estudiantes, si se han utilizado para los fines con que se diseñaron inicialmente, etc.
- *La metodología y actividades realizadas*: comprobando si son suficientes y se ajustan en el tiempo, en qué áreas ha habido mayores dificultades, en qué medida el trabajo en grupo ha dado lugar a debate y comunicación, o en qué grado han resultado motivadoras para los estudiantes.
- *El uso de las herramientas de evaluación*: viendo si recopilan la información adecuada, en qué medida sobrecargan el trabajo del docente, y en qué grado regulan el aprendizaje de los estudiantes.

6. Conclusiones

Para concluir este trabajo, se plantea un pequeño análisis didáctico que permita relacionar la unidad con el marco teórico expuesto. Junto a esto, se evalúa la consecución de los objetivos propuestos al inicio del trabajo y se comenta de qué formas su realización ha afectado al desarrollo profesional del autor en el futuro.

6.1 Relación de la unidad con el marco teórico y propuestas de mejora

La unidad didáctica se ha diseñado partiendo de los resultados teóricos en educación matemática. Incluimos en la Tabla 6 los autores principales en los que nos hemos basado, y su relación con las decisiones tomadas en la unidad didáctica. Sin embargo, también presenta margen de mejora en distintos aspectos.

Comprobamos que al trabajar con regletas de Cuisenaire y con la recta numérica, el modelo discreto posee poco protagonismo en nuestra unidad didáctica, apareciendo únicamente en el cuestionario inicial y en la sesión 6, como parte de la actividad en DESMOS.

Tabla 6

Relación entre autores de referencia y la unidad didáctica.

Estudio	Referencias	Visión	Relación con la UDI
Contenidos	Kieren (1976,1980)	Uso de diferentes interpretaciones de las fracciones.	*Parte-todo:* regletas y modelos gráficos (todas). *Medida* sobre la recta numérica (S4). *Reparto* de bocadillos (S2). *Operador:* puzzle de Brousseau y llenado de vasos de agua (S8, S9). *Razón:* puntajes y mezclas (S5, S7).
Aprendizaje	Lesh (1981), Behr *et al.* (1983)	Uso de distintas representaciones y material manipulativo.	Uso de regletas de Cuisenaire, modelos de recta y área, símbolos y vocabulario. Actividad DESMOS de traducción entre representaciones.
	Steffe y Olive (2010)	Desarrollo de los esquemas fraccionarios a partir de los de conteo.	Introducción de conceptos mediante fracciones unitarias, extensión a fracciones propias, y finalmente a impropias y números mixtos.
	Kieren (1993)	Evolución de la formalidad en la concepción de fracción.	Avance desde representaciones intuitivas y situaciones concretas hacia el trabajo con símbolos.
Enseñanza	Mack (1990)	Uso del pensamiento informal a la hora de introducir los conceptos.	Planteamiento de problemas cotidianos para introducir conceptos (S2, S3, S5, S7, S8).
Evaluación	Sanmartí (2007)	Evaluación como regulador del aprendizaje.	Autoevaluación, evaluación a lo largo del proceso mediante portafolios.

A fin de intentar virtualizar el aula presencial, y estudiar qué problemas surgen, hemos planteado sesiones síncronas, y asumido que los estudiantes cuentan con todos los recursos necesarios para seguir dichas sesiones, sin evaluar qué implicaciones podría tener para un estudiante la falta de alguno de estos recursos (micrófono, conexión a internet defectuosa, acceso a dispositivos, etc.). Plantear la unidad en un formato asíncrono podría resolver parte de estos problemas, pero también tendría un impacto muy negativo en cuanto a la comunicación en la unidad. Esto cabría estudiarse en profundidad, y ver cómo es posible resolver los nuevos problemas en este formato. También, es necesario comprobar qué cambios supone el uso de una tablet respecto a un ordenador, o cómo se adaptan los materiales a dispositivos móviles, en caso de que algunos estudiantes no tengan acceso a un ordenador.

Por último, hemos de recordar que la unidad original no fue llevada a la práctica, y por lo tanto es difícil saber con seguridad qué otro tipo de problemas pueden surgir una vez los estudiantes se enfrenten a la unidad. En particular, dado que en mi formación previa se ha basado fundamentalmente en el uso de pruebas finales, aún debo poner en práctica herramientas de evaluación alternativas para observar su funcionamiento y ajustar su uso.

6.2 Consecución de los objetivos marcados

En la introducción de este trabajo planteamos tres objetivos principales a cumplir. Evaluamos a continuación el grado de consecución de estos objetivos.

Realizar un análisis de la unidad didáctica original a partir de las investigaciones en educación matemática, mostrar los aspectos que es posible mejorar y encontrar formas de resolverlos.

Hemos presentado un marco teórico con resultados de la investigación en educación matemática referentes al estudio de la fracciones, comprobando la complejidad que se esconde tras este concepto en cuanto a interpretaciones, representaciones, desarrollo de esquemas numéricos y consideraciones que se han de tener en su enseñanza. Hemos observado que nuestra unidad original, si bien se aleja de la enseñanza algorítmica tradicional mediante el uso de herramientas manipulativas, presenta una visión limitada del megaconcepto de fracción, y aún presenta margen de mejora en cuanto al uso del pensamiento informal de los estudiantes, el trabajo con un mayor número de interpretaciones, o la estimación del tamaño relativo de las fracciones.

También hemos recopilado información más allá de las fracciones, comprobando aspectos del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, su evaluación, o el papel del bilingüismo en el aula. En base a esta información, hemos considerado que la unidad original debía dar mayor importancia al debate y la comunicación, fijar unas normas de uso del idioma y hacer de la evaluación un elemento regulador del aprendizaje. Para esto último, hemos propuesto el uso del portafolio y una observación del docente centrada en la detección de errores conceptuales, así como formas de resolver dichos errores.

Estudiar qué implicaciones educativas tiene el uso de un medio virtual en el proceso de enseñanza-aprendizaje, y cómo es posible llevarlo a cabo de manera adecuada, reflexionando sobre qué aspectos se mantienen, cuáles mejoran y cuáles empeoran en este nuevo modelo.

Hemos sintetizado la información relativa al informe COTEC (2020) sobre la brecha digital en España, comprobando que dicha brecha está presente y puede dar lugar a una desigualdad de oportunidades educativas, suponiendo un obstáculo que sería prioritario resolver en caso de volver a una situación similar.

Más allá de esta brecha digital, vemos que la educación a distancia presenta nuevos retos, como la comunicación en el aula o la observación del trabajo del alumnado, pero también nuevas oportunidades, como el cambio del modelo de clase, el uso de herramientas TIC, o el acceso a materiales en cualquier momento.

Hemos encontrado herramientas que permiten resolver parte de los problemas surgidos, como el uso de salas virtuales dentro de videollamadas, o la plataforma GeoGebra Classroom. Con el avance de la tecnología se espera que surjan nuevas herramientas, que permitan virtualizar más aspectos del aula y facilitar así el uso de distintas metodologías en la educación a distancia. Esta nueva tecnología deberá complementarse con investigación que muestre qué aspectos de estas tecnologías son más efectivos y cómo deben ser aplicadas, sentando así forma las bases para el desarrollo de nuevas tecnologías posteriores.

Desarrollar una nueva unidad didáctica que mejore ciertos aspectos de la unidad anterior, y que permita a su vez ser desarrollada a distancia mediante el uso de un medio virtual, generando a su vez un banco de recursos TIC online disponible para cualquier docente.

La Tabla 6, en el apartado anterior, nos muestra la relación entre los autores que han servido de referencia y el diseño de la unidad didáctica. La falta de datos sobre la puesta en práctica de ambas unidades hace complicado evaluar si la nueva unidad realmente representa una mejora. Sin embargo, vemos que trata un concepto de fracción más amplio, presenta distintas herramientas para hacer más accesibles los conceptos a los estudiantes, y está preparada para su realización en un medio virtual, resolviendo algunas de las carencias que tenía la unidad original.

Junto a esto, hemos desarrollado diferentes applets de GeoGebra dedicadas a las actividades que planteamos en este trabajo, y que se mantendrán disponibles online bajo la licencia que ofrece GeoGebra, para su uso por parte de cualquier persona interesada. Es posible acceder a todas ellas mediante los enlaces incluidos en el Anexo III.

6.3 Consideraciones para la futura profesión docente

Realizar este trabajo ha requerido desarrollar diversas competencias, conocer nuevas tecnologías y, en general, reflexionar sobre el propio significado de la educación y la función de las matemáticas en el currículo escolar. Para concluir, expongo qué me ha aportado este trabajo y qué implicaciones tendrá esto en mi futura profesión docente.

En primer lugar, este trabajo ha supuesto una reflexión en torno al propio carácter del conocimiento matemático. Educado en una concepción formalista de las matemáticas, y acostumbrado a trabajar en la abstracción, he necesitado ampliar mi visión. He comprendido que la matemática es más que una larga lista de axiomas, reglas, definiciones y resultados, y cada concepto surge con distintos fines, representaciones o fenomenologías. Junto a ello, he necesitado reflexionar sobre qué significa saber matemáticas, y qué papel juega la alfabetización matemática en una sociedad democrática y en la formación de cada individuo. En mi labor docente, esto dará lugar a la enseñanza de unas matemáticas más completas, a una mayor empatía con mis estudiantes, a una evaluación más completa del currículo de la asignatura, y al planteamiento de actividades que resulten significativas y motivadoras.

En segundo lugar, este trabajo ha ido acompañado de la búsqueda, lectura y síntesis de diversos textos en educación matemática, tanto en castellano como en inglés. Esto, junto a las asignaturas de la especialidad de matemáticas del máster, han supuesto una introducción en el mundo de la didáctica de la matemática, y me han mostrado la importancia que esta ciencia juega en la mejora de la educación. Dada la complejidad que he descubierto tras un concepto tan básico como el de fracción, considero necesario continuar formándome en otras partes y dimensiones del currículo, aplicando lo aprendido y relacionándolo con mi experiencia en el aula.

Por último, he necesitado aprender a organizar la información, sintetizarla y redactarla, y dar importancia a la estructura y la expresión. También he profundizado en herramientas que sólo conocía superficialmente, como GeoGebra y Microsoft Word, y he conocido recursos y funcionalidades que me resultarán útiles en mi enseñanza, como DESMOS, GeoGebra Classroom o BigBlueButton.

Referencias

Almeida, R. (2017). Matemáticas en el Proyecto CLIL. *Revista Números*, *96*, 69-77.

Alonso, M., Gil, D. y Martínez-Torregosa, J. (1996). Evaluar no es calificar. La evaluación y la calificación en una enseñanza constructivista de las ciencias. *Investigación en la escuela, 30*, 15-26.

Ananga, P., y Biney, I. (2017). Comparing face-to-face and online teaching and learning in higher education. *MIER Journal of Educational Studies, Trends and Practices, 7*, 165-179.

Azcárate, P. (2005). Propuestas alternativas de evaluación en el aula de matemáticas. En J. M. Chamoso y J. Durán (Eds.), *Enfoques actuales en la didáctica de la matemática,* (pp. 187-221). Madrid, España: MEC.

Aznar, F. (2020). La educación secundaria en España en medio de la Crisis del COVID-19. *International Journal of Sociology of Education*, 9, 53-78.

Bakia, M., Shear, L., Toyama, Y. y Lasseter, A. (2012). *Understanding the Implications of Online Learning for Educational Productivity.* Washington, D.C.: U.S. Department of Education.

Barwell, R., Barton, B. y Setati, M. (2007). Multilingual issues in mathematics education: Introduction. *Educational Studies in Mathematics, 64*(2), 113-119.

Berlinghoff, W. P., y Gouvêa, F. Q. (2004). *Math through the Ages. A gentle History for Teachers and Others.* Farmington, ME; Washington, D.C., Estados Unidos: Oxton House Publishers/Mathematical Association of America.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., y Silver E. (1983). Rational Number Concepts. En R. Lesh, y M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*, (pp. 91-125). Nueva York: Academic Press.

Boyer, C. B. y Merzbach, U. C. (2011*). A History of Mathematics*. Nueva York, Estados Unidos: Wiley.

Calatayud, M. A. (2018). Los agrupamientos escolares a debate. *Tendencias Pedagógicas, 32*, 5-14.

Camargo, A. y Hederich, C. (2010). Jerome Bruner: Dos teorías cognitivas, dos formas de significar, dos enfoques para la enseñanza de la ciencia. *Psicogente, 13*(24), 329-246.

Cambridge University (s.f.). *Teaching Maths in English – a CLIL Approach*. Cambridge: Cambridge University Press.

Cardeñoso, J. M. y Azcárate, P. (2012). Evaluación de la competencia matemática. *Investigación en la escuela, 78*, 31-42.

Castro, E. (2015). *Significados de las fracciones en las matemáticas escolares y formación inicial de maestros* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, Granada, España. Recuperado de https://hera.ugr.es/tesisugr/24939493.pdf.

Cid, E., Godino, J. y Batanero, C. (2003). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros.* Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. ISBN: 84-932510-4-6.

Cortina, J. L., Zúñiga, C., Visnovska, J. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática, 25*(2), 7-29.

COTEC (2020). COVID-19 y educación II: escuela en casa y desigualdad. Recuperado de https://cotec.es/proyecto/educacion-y-covid-19/

Coyle, D., Hood, P., y Marsh, D. (2010). *CLIL: Content and Language Integrated Learning*. Cambridge: Cambridge University Press.

Cramer, K., Wyberg, T. y Leavitt, S. (2008). The role of representations in fraction addition and subtraction. *Mathematics teaching in middle school*, *13*(8), 490-496.

Cubero, R. (2005). Elementos básicos para un constructivismo social. *Avances en Psicología Latinoamericana, 23*, 43-61.

Dalton-Puffer, C. (2011). Content-and-language Integrated Learning: From Practice to Principles, *Annual Review of Applied Linguistics, 31,* 182-204.

Davis, P., y Hersh, R. (1984). *The Mathematical Experience.* Boston, Estados Unidos: Birkhäuser.

Díaz-Barriga, F. y Hernández, G. (2003). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo.* Madrid, España: McGraw Hill.

Fandiño, M. I. (2015). Las fracciones: aspectos conceptuales y didácticos. En L. A. Hernández, J. A. Juárez, J. Slisko (Eds.), *Tendencias en la educación matemática basadas en la investigación*, (pp. 25-38). Puebla, México: BUAP.

Font, V. (2003). Matemáticas y Cosas. Una mirada desde la educación matemática. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, 10*(2), 249-279.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Nueva York, Estados Unidos: Kluwer Academic Publishers.

Gil. D. y De Guzmán, M. (1993). *Enseñanza de las Ciencias y la Matemática. Tendencias e Innovaciones.* España: Popular.

Godino, J. D. (2010). Perspectiva de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina tecnocientífica. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Godino, J., Batanero, C., y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf

Gómez, P. (2005). Análisis Didáctico en la Formación inicial de Profesores de Matemáticas de Educación Secundaria. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/394/1/GomezP05-2797.PDF

Instrucciones de 7 de junio de 2018, de la dirección general de innovación y formación del profesorado, sobre la organización y funcionamiento de la enseñanza bilingüe.

Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's strategies and Errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Windsor, Reino Unido: NFER-Nelson Publishing Company.

Kieren, T. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. En R. Lesh y D. Bradbard (Eds.), *Number and measurement, Papers from a Research Workshop,* (pp. 101-144). Athens, Georgia, Estados Unidos:ERIC/SMEAC.

Kieren, T. (1980). The Rational Number Construct—Its Elements and Mechanisms. En T. Kieren (Ed.), *Recent Research on Number Learning,* (pp. 125-150). Columbus, Estados Unidos: ERIC/SMEAC.

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. En T. P. Carpenter, E. Fennema, y T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers: An integration of research,* (pp. 49–84). Nueva Jersey, Estados Unidos: Lawrence Erlbaum.

Kilpatrick, W. H.(1987). Lo que el constructivismo puede ser para la educación matemática. *Educar, 17*, 37-52.

Klinger, C. (2009). Behaviourism, cognitivism, constructivism, or connectivism? Tackling mathematics anxiety with 'isms' for a digital age. *Numeracy works for life: Proceedings of the 16th international conference of adults learning mathematics,* (pp. 154-161). Adelaida: University of South Australia.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning: Toward a theoretical framework for research. En Lester, F. K. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 629-667). Charlotte, Estados Unidos: Information Age Publishing.

Lee, C. (2006). *Language for learning mathematics.* Nueva York, Estados Unidos: McGraw Hill.

Lesh, R. (1981). Applied Mathematical Problem Solving. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 235-264.

Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. En L. Chamorro (Ed.), *Didáctica de las matemáticas para primaria,* (pp. 188-215), Madrid, España: Pearson Educación.

Llinares, S. y Sánchez, M. V. (1997). *Fracciones. La relación parte-todo.* Madrid, España: Síntesis

Lorenzo, F., Casal, S., y Moore, P. (2009). The effects of Content and Language Integrated Learning in European Education: Key findings from the Andalusian Bilingual Sections Evaluation Project. *Applied Linguistics*, *31*(3), 418-442.

Mack, N. (1990). Learning fractions with understanding: Building on Informal Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(1), 16-32.

Mack, N. (1995). Confounding Whole-Number and Fraction Concepts When Building on Informal Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(5), 422-441.

Mamede, E. y Oliveira, M. (2011). Issues on Children's Ideas of Fraction when Quotient Interpretation is Used. En M. Pytlak, T. Rowland, y E. Swoboda (Eds.), *Proceeding of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* (pp. 1782-1791). Rzeszów, Poland: University of Rzeszów y ERME.

Marsh, D. y Frigols, M. J. (2012). Content and Language Integrated Learning. En C. A. Chapelle (Ed.), *The Encyclopedia of Applied Linguistics*, (pp. 911-922). Oxford, Reino Unido: John Wiley and Sons.

Meyer, O. (2010). Towards quality-CLIL: successful planning and teaching strategies. *Pulso*, *33*, 11-29.

Moschkovish, J. (2007). Using two languages when learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 64*, 121-144.

Niss, M. (2003). Quantitative Literacy and Mathematics Competencies. En B. L. Madison y L. A. Steen (Eds.), *Quantitative Literacy: Why Numeracy Matters for Schools and Colleges,* (pp. 215-220). Estados Unidos: National Council on Education and the Disciplines.

Olive, J. (2001). Children's Number Sequences. An Explanation of Steffe's Constructs and an Extrapolation to Rational Numbers of Arithmetic. *The Mathematics Educator*, *11*(1), 4-9.

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato.

Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado.

Palacios, F. y Cimas, J. (2019). And What About Maths? Consideraciones para la elaboración de unidades didácticas AICLE para trabajar la competencia matemática. En C. Díaz (Ed.), *Lenguas y culturas: educación multilingüe y multicultural,* (pp. 59-63). Córdoba: UCOPress.

Panaoura, A., Gagatsis, A. Elia, I. y Deliyianni, E. (2010). Beliefs, representations and performance: toward a comprehensive model for the learning of fractions and decimals. En A. Gagatsis, T. Rowland, A. Panaoura, y A. Stylianides (Eds.), *Mathematics Education Research at the University of Cyprus and the University of Cambridge: A Symposium,* (pp. 119-133). Lefkosia: University of Cyprus.

Pitkethly, A. y Hunting, R. (1996). A Review of Recent Research in the Area of Initial Fraction Concepts. *Educational Studies in Mathematics*, *30*, 5-38.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico, (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, (pp. 61-94). Barcelona: Horsori.

Pujolàs, P. (1997). Los grupos de aprendizaje cooperativo: Una propuesta metodológica y de organización del aula favorecedora de la atención a la diversidad. *Aula de Innovación Educativa, 59*, 41-45.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Rico, L. (1997). Dimensiones y componentes en la noción de currículo. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria,* (pp. 377-414). Madrid: Síntesis.

Sangrà, A. y Stephenson, J. (s.f.). *Modelos pedagógicos y e-learning.* Universitat Oberta de Catalunya. Recuperado de https://yedaldisenodecursosenlinea.files.wordpress.com/2012/09/modelos-pedagogicos-y-e-learning.pdf

Sanmartí, N. (2007). *Evaluar para aprender.* Barcelona, España: Graó.

Sanz, M. T., Figueras, O., y Gómez, B. (2018). Las fracciones, habilidades de alumnos de 15 a 16 años. *Revista de Educación de la Universidad de Granada, 25*, 257-279.

Siegler, R. S., Thompson, A. C., Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology, 62*, 273-296.

Siegler, R. y Fazio, L. (2011). *Teaching Fractions.* París, Francia: International Academy of Education.

Sierpinska, A., y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop, M. A. K. Clements, C. Keitel-Kreidt, J. Kilpatrick, y C. Laborde (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*, (pp. 827-876). Dordrecht, HL: Kluwer, A. P.

Silver, E. A. (1983). Probing young adults' thinking about rational numbers. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 5*, 105–117.

Smith, G., Ferguson, D, y Caris, M. (2002). Teaching Online Versus Face-to-face. *Educational Technology Systems, 30*(4), 337-364.

Steffe, L. P., y Olive, J. (2010). *Children's Fractional Knowledge.* Nueva York, Estados Unidos: Springer.

Streefland, L. (1991). Las fracciones: Un enfoque realista. En T. Carpenter, E. Fennema, T. Romberg, y L. Erlbaum (Eds.), *Rational Numbers: An Integration of Research,* (pp. 289- 326). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Triana, M., Ceballos, J., y Villa, J. (2016). Una dimensión didáctica y conceptual de un instrumento para la valoración de Objetos Virtuales de Aprendizaje. El caso de las fracciones. *Entramado, 12*(2), 166-186.

Vaello, J. (2007). *Cómo dar clase a los que no quieren*. Madrid: Santillana.

Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' reasoning about rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 181-209.

Walshaw, M. (2017). Understanding mathematical development through Vygotsky. *Research in Mathematics Education. 19*(3), 293-309.

Yang, D. y Tsai, Y. F. (2010). Promoting Sixth Graders' Number Sense and Learning Attitudes via Technology-based Environments. *Educational Technology and Society*, *13*(4), 112-125.

Anexos

Anexo I: Cuestionario inicial

Cada pregunta del cuestionario inicial va asociada a algunos de los siguientes ítems:

1. Visión general de las fracciones.
2. Capacidad de interpretar representaciones (discretas y continuas).
3. Modelización y resolución de problemas.
4. Expresión y comprensión lectora.
5. Sentido numérico.
6. Cálculo sencillo.

1. ¿Qué es una fracción? Pon un ejemplo de una situación en que aparezca una fracción.

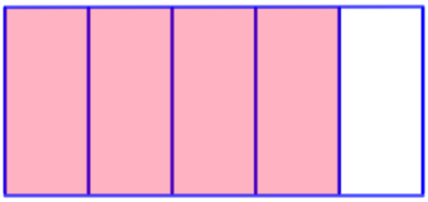
Ítems: 1, 5.

2. ¿Puede haber fracciones más grandes que la unidad?

a. Sí.
b. No.
c. No lo sé.

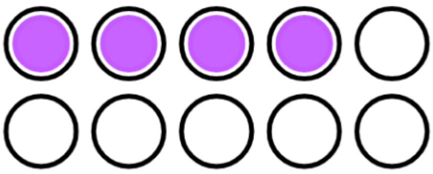
Ítems: 1, 5.

3. ¿Qué fracción de la figura está pintada de azul?



Ítems: 2, 4

4. ¿Qué fracción de los puntos está coloreada?



Ítems: 2

5. **Si todas las pizzas tienen el mismo tamaño, ¿quién come más pizza?**

a. Una persona que reparte 3 pizzas entre 8 personas.
b. Una persona que reparte 2 pizzas entre 3 personas.

Justifica tu respuesta.

Ítems: 3, 4.

6. **¿Qué fracción está más cerca de 0.3?**
    a. 2/5
    b. 3/3
    c. 10/3
    d. No pueden compararse porque uno es un decimal, y lo demás son fracciones.

Justifica tu respuesta.

Ítems: 5, 6

7. **Si dividimos tres tartas entre cinco personas, cada persona se lleva…**
    a. 3/5 de tarta.
    b. 0.6 tartas.
    c. a y b son correctas.
    d. 5/3 de tarta.

Justifica tu respuesta.

Ítems: 1, 3, 5.

8. **El resultado de la operación 2/3 + 1/3 es:**
    a. 3/6
    b. 3/3
    c. 7/3
    d. 2/9

Justifica tu respuesta.

Ítems: 5, 6.

9. **Me hago un cola cao echando dos cucharadas de cacao a un vaso de leche. ¿Cuántas cucharadas tendría que echar si quiero hacerme un vaso y medio de cola cao?**
    a. Dos cucharadas y media.
    b. Tres cucharadas.
    c. Cuatro cucharadas.
    d. Tres cucharadas y media.
    e. Otro:

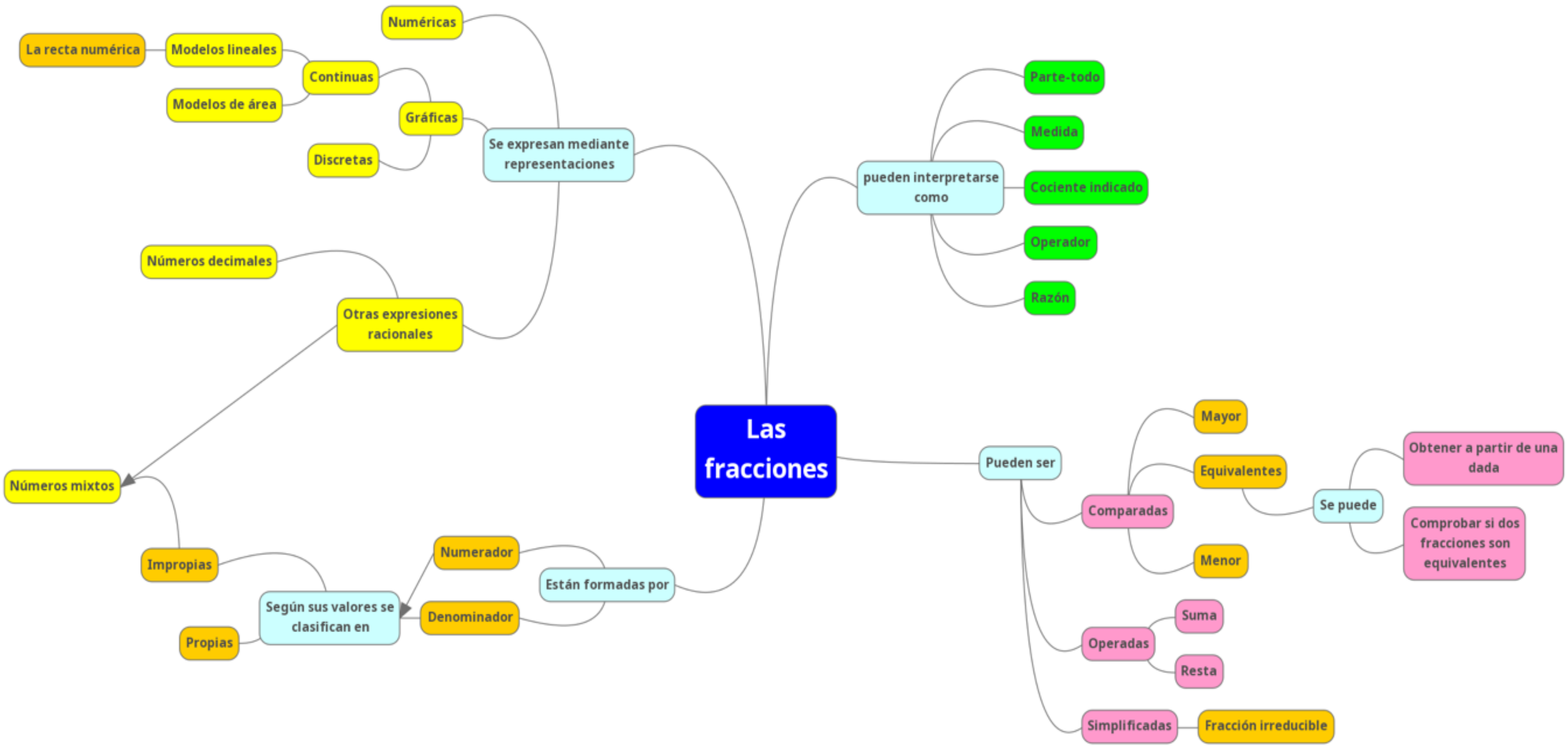
Ítems: 3, 4

10. **Plantea un problema cuya solución sea la fracción 4/5.**

Ítems: 3.

Anexo II: Mapa conceptual de contenidos

El siguiente mapa conceptual sigue un código de colores: el color verde se refiere a interpretaciones de las fracciones bajo distintas situaciones, el amarillo a formas de representación o expresión de los racionales, el naranja a contenidos conceptuales, y el rosa a contenidos procedimentales.



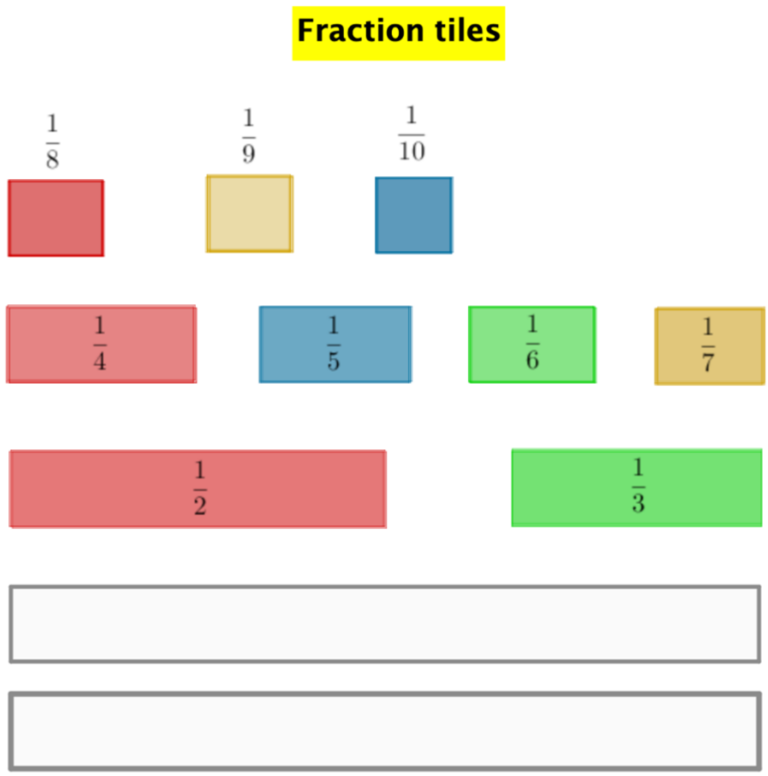
Anexo III: Banco de applets de GeoGebra

1. Applet de Geogebra *fraction tiles* (elaboración propia): El recurso completo puede encontrarse [en el siguiente enlace](). Este applet consiste en una virtualización de las regletas de Cuisenaire utilizadas en la unidad original. Los rectángulos de colores pueden moverse por la pantalla, y representan fracciones de los rectángulos grises inferiores, tomados como unidad. Esto permite dar significado a las fracciones en un modelo de área continuo, e interpretaciones parte-todo y medida. También facilita la comparación de fracciones bajo la misma unidad, la obtención de fracciones equivalentes, simplificación y operaciones.

En la sesión inicial se utiliza una pequeña modificación de este applet, en la que no se incluyen los símbolos de las fracciones correspondientes.

Figura 15

Imagen del applet "Fraction tiles". Elaboración propia.



2. Applets de Geogebra de traducción numérica entre números mixtos y fracciones (elaboración propia). Los recursos pueden encontrarse en los siguientes enlaces:

- Fracción a número mixto.
- Número mixto a fracción.

Se trata de dos recursos dirigidos a coordinar el algoritmo de traducción entre números mixtos y fracciones impropias. En ambos casos es posible modificar el numerador y denominador de la fracción o número mixto correspondiente, y comprobar cómo dicho cambio afecta al modelo gráfico y a la otra expresión. Se ha incluido un deslizador de "etapas de solución" que muestra el proceso de traducción por pasos, enfatizando sobre el modelo gráfico a qué cambio, o a qué concepto, nos referimos en cada paso.

Figura 16

Applet de traducción de fracción a número mixto. Elaboración propia.

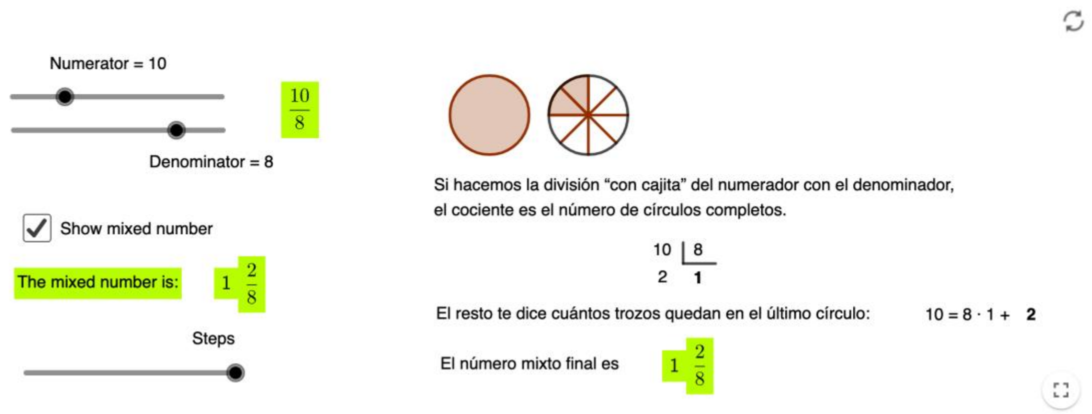
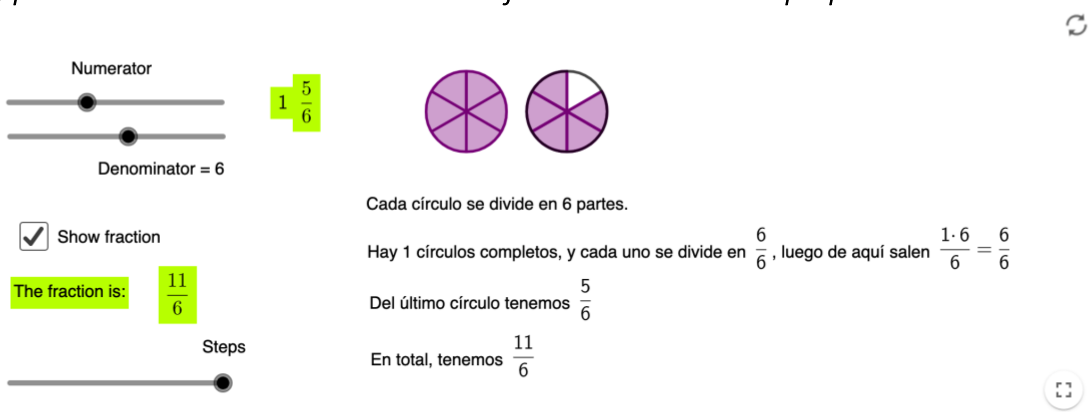


Figura 17

Applet de traducción de número mixto a fracción. Elaboración propia.



3. Applet de GeoGebra de representación de fracciones sobre la recta numérica (elaboración propia): El recurso puede encontrarse en el siguiente enlace. Este applet permite situar distintas fracciones sobre una recta de extremos 0 y 2. Para ello, permite modificar el número de piezas en que se divide la recta, y moverse por los distintos puntos sobre esta división. Esto permite al estudiante relacionar los símbolos con este modelo gráfico de manera dinámica, comprobando cómo los cambios en numerador y denominador afectan a la posición del punto. En la Sesión 4 aparecen además pequeñas modificaciones de este applet en los que los extremos cambian. Podemos comprobar un ejemplo de ello en la Figura 19, donde los extremos son 10 y 11, y se ha limitado la posibilidad de modificar el número de piezas para la actividad.

Figura 18

Applet de representación de fracciones sobre la recta numérica. Elaboración propia.

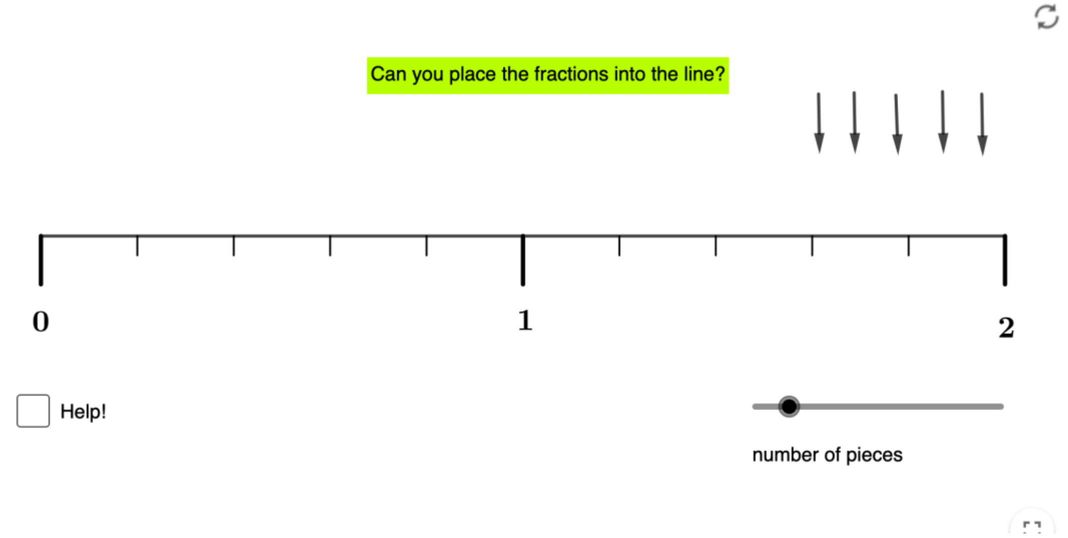
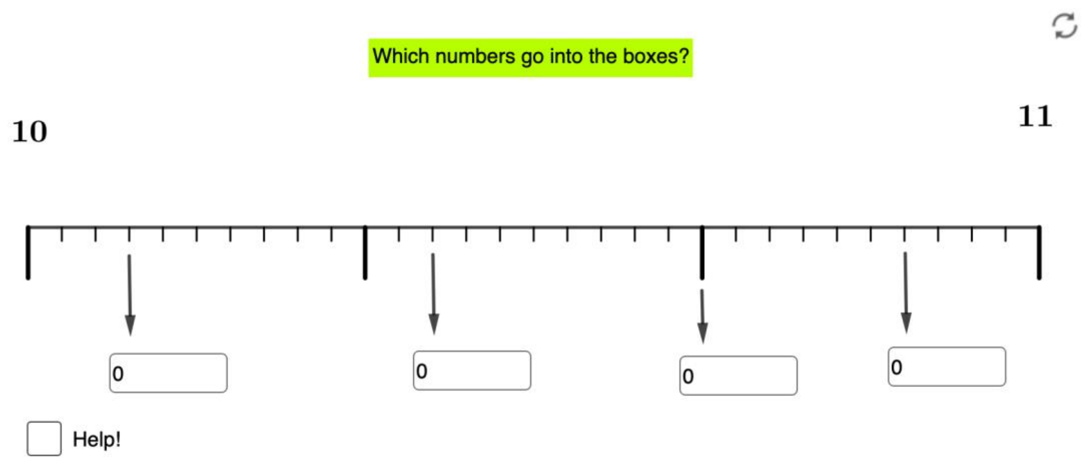


Figura 19

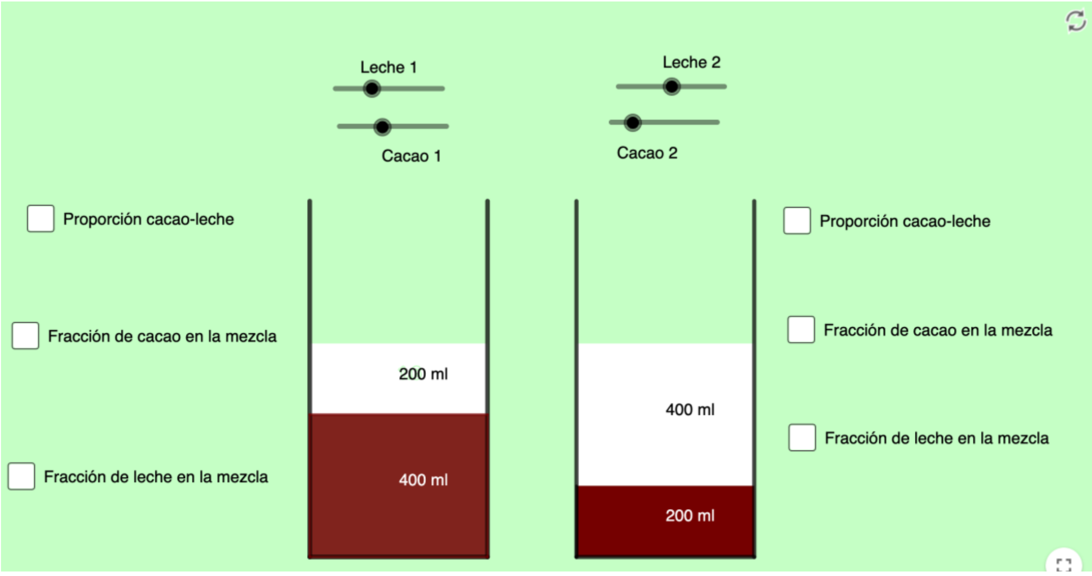
Applet de representación de fracciones sobre la recta numérica entre 10 y 11. Elaboración propia.



4. Applet de Geogebra de mezclas de leche y cacao (elaboración propia): El recurso puede consultarse en el siguiente enlace. Este applet permite modificar las cantidades de leche y cacao en una mezcla, mostrando al mismo tiempo la fracción de cada uno de ellos en la mezcla, así como la relación entre las cantidades de ambos elementos. Esto permite presentar la fracción como una medida de "lo oscura" que será la mezcla (una magnitud intensiva) y de este modo una razón entre cantidades. De la misma forma, esta idea ayuda a dar un significado más amplio a la comparación de fracciones cuando la unidad es distinta o no está definida de forma clara.

Figura 20

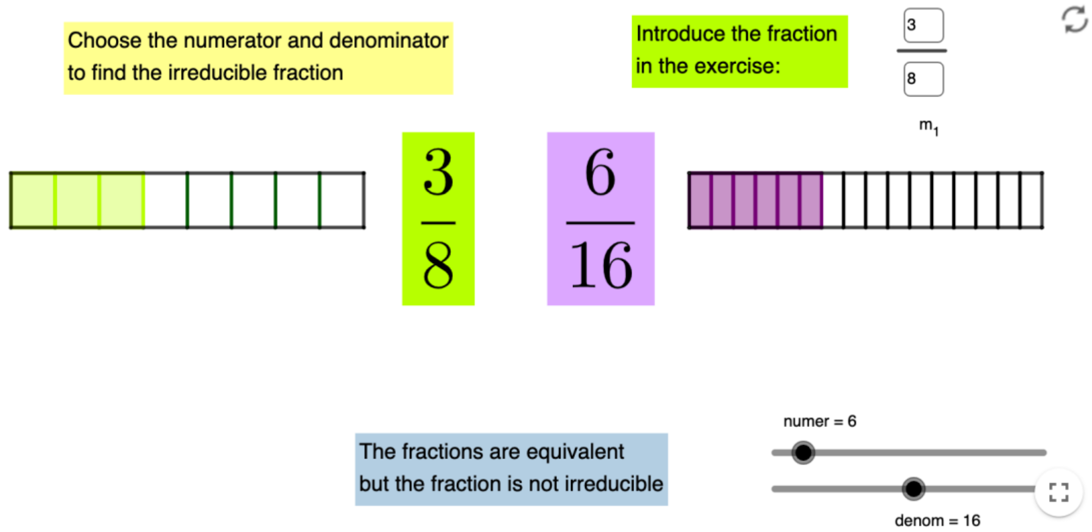
Applet de mezclas de leche y cacao. Elaboración propia.



5. Applet de GeoGebra de simplificación de fracciones (elaboración propia): El recurso completo puede consultarse en el siguiente enlace. Permite introducir una fracción de referencia, y modificar deslizadores en una segunda fracción para simplificar la primera. Este applet coordina los cambios en los símbolos con las representaciones visuales, fomentando la búsqueda de estrategias para encontrar fracciones equivalentes. Además, devuelve un mensaje al obtener la solución correcta o una fracción equivalente que no sea la irreducible.

Figura 21

Applet de simplificación de fracciones. Elaboración propia.

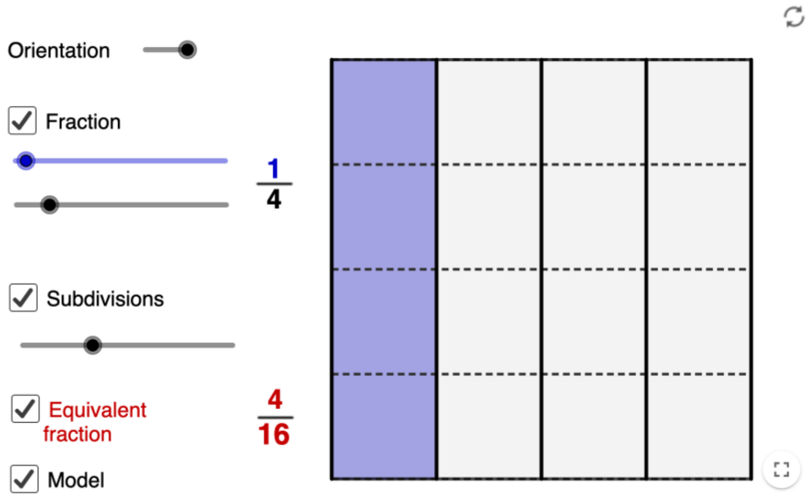


6. Applet de obtención de fracciones equivalentes (obtenido de *EDC in Maine*): El recurso puede encontrarse en el siguiente enlace. Este applet, encontrado en la web, muestra fracciones mediante divisiones de un cuadrado. Además, permite subdividir transversalmente estas divisiones para mostrar cómo es posible obtener fracciones equivalentes en las que numerador y denominador son más grandes.

Figura 22

Applet de obtención de fracciones equivalentes.

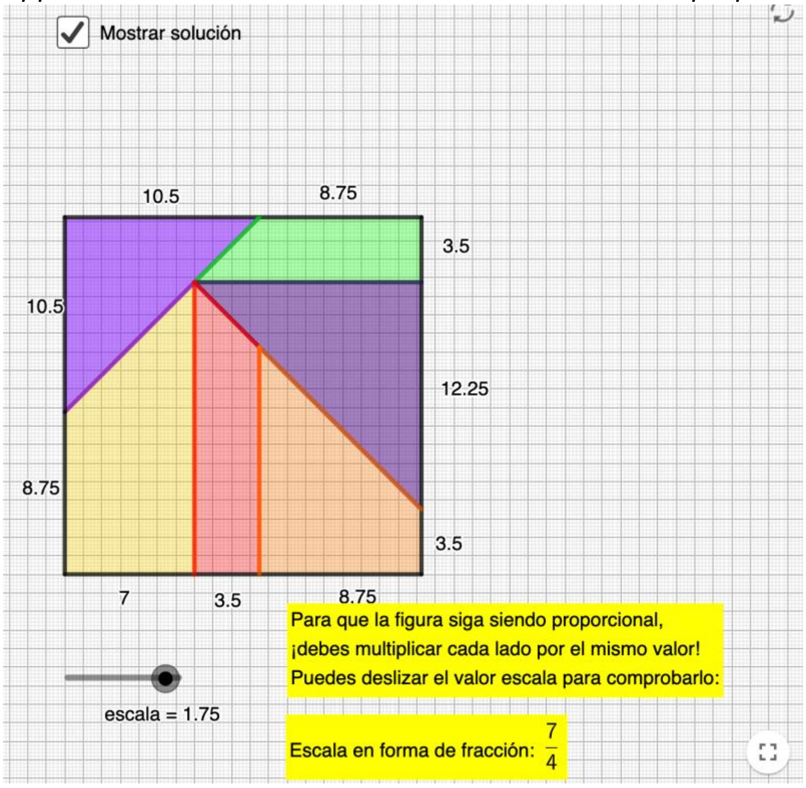
Obtenido de los recursos de GeoGebra publicados por EDC in Maine, disponibles en el siguiente enlace.



7. Actividad en GeoGebra de Puzzle de Brousseau (elaboración propia): El recurso completo puede consultarse en el siguiente enlace. Se trata de una versión virtualizada del puzzle de Brousseau, que presenta algunas diferencias respecto al puzzle original, en papel. En particular, no es posible recortar las piezas del puzzle, y dibujar el puzzle ampliado puede resultar algo más complejo. No obstante, añadimos un solucionario en el que se comprueba cómo cambia el dibujo a medida que multiplicamos cada lado por un mismo valor, de manera dinámica.

Figura 23

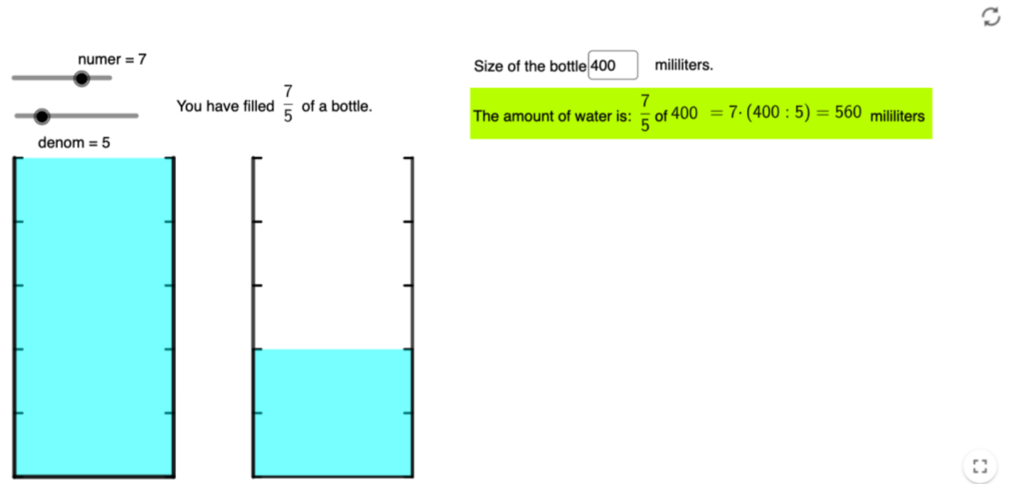
Applet solución del Puzzle de Brousseau. Elaboración propia.



8. Applet de GeoGebra de llenado de botellas de agua (elaboración propia): El recurso puede consultarse [en el siguiente enlace.] Este recurso muestra el llenado de partes de una o dos botellas de agua rectangulares. Se permite modificar el volumen de la botella, así como la parte que está llena. Simultáneamente, se muestran los cálculos con estos valores en torno a la cantidad de agua que aparece en las botellas. Esto permite al estudiante observar simultáneamente cómo cambian las representaciones gráficas y numéricas conforme se modifica la fracción a utilizar, dando una visión del algoritmo que se sigue a la hora de aplicar la fracción como un operador.

Figura 24

Applet de llenado de botellas de agua. Elaboración propia.



9. Applet de GeoGebra de cálculo de sumas y restas sobre la recta (elaboración propia): Los recursos pueden encontrarse en los siguientes enlaces:

- Suma de fracciones.
- Resta de fracciones.

Estos applets permiten calcular la suma y resta de dos fracciones, mostrando una representación como suma de vectores sobre la recta numérica. Permiten también subdividir la recta según el denominador de cada una de las fracciones, o un denominador común a ambas, así como estimar soluciones mediante un puntero. Por último, muestran cómo las situaciones representadas se traducen a los símbolos de la operación. Todo esto permite al estudiante estimar resultados de operaciones con fracciones y desarrollar un sentido numérico en torno a la magnitud relativa y la posición de las fracciones sobre la recta

Figura 25

Applet de sumas sobre la recta numérica. Elaboración propia.

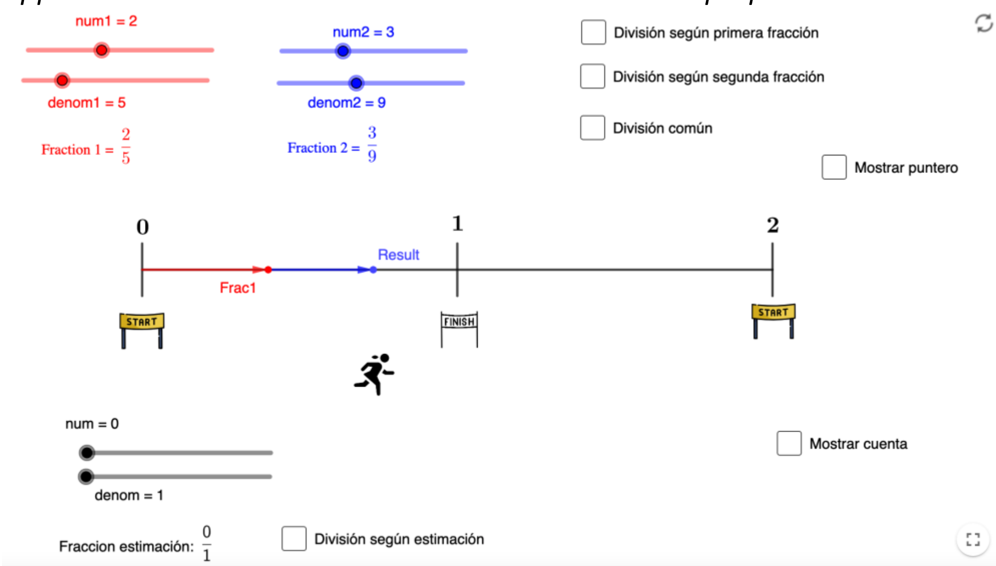
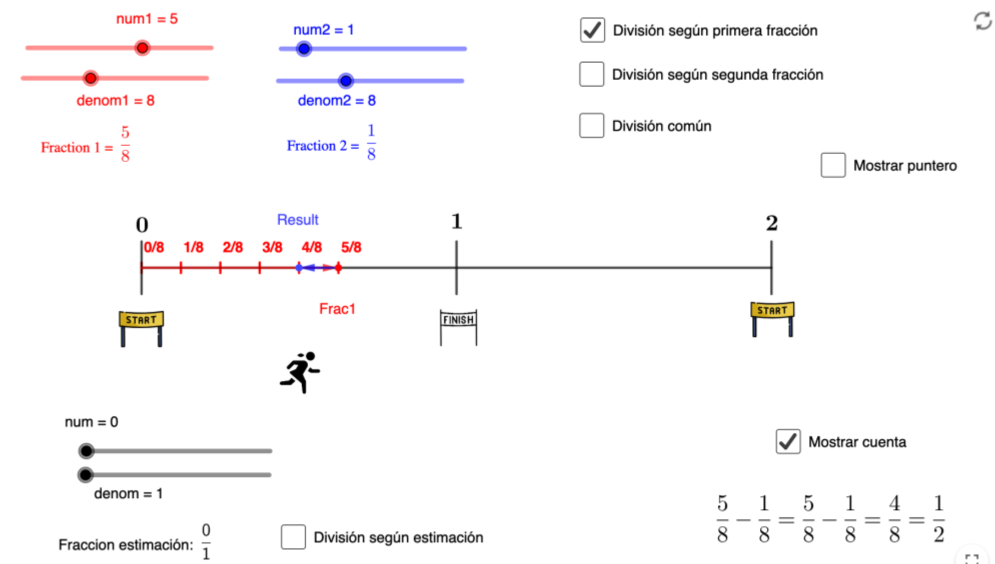


Figura 26

Applet de restas sobre la recta numérica. Elaboración propia.



Anexo IV: Rúbrica de evaluación por observación

Ítem	Cr. ev.	1	2	3	4
Comunicación **CL, CMCT**	2.1	Evita el uso de terminología matemática y comete errores conceptuales graves al hacerlo.	Posee dificultades a la hora de utilizar conceptos matemáticos para expresarse, recurriendo en su lugar a un vocabulario más informal.	Comete errores menores al usar lenguaje matemático para expresar ideas. Asocia los modelos visuales y manipulativos con los nombres de las fracciones correspondientes.	Utiliza adecuadamente terminología matemática para expresar ideas. Utiliza los nombres de las fracciones para referirse a elementos de los modelos visuales y manipulativos (por ejemplo, las piezas de las cartulinas).
Uso del segundo idioma **CL**	2.1	Evita completamente el uso del segundo idioma. Desconoce vocabulario fundamental en la unidad didáctica.	Evita el uso del segundo idioma. Desconoce parte del vocabulario propio de la asignatura.	Utiliza, con errores menores, expresiones sencillas en un segundo idioma. Conoce el vocabulario básico de la asignatura, pero no lo pone en práctica.	Conoce y utiliza expresiones sencillas y vocabulario matemático básico en un segundo idioma.
Soluciones a problemas **CL, CMCT, CAA, SIEE**	1.1	Denota falta de organización a la hora de expresar la resolución de un problema. Da soluciones erróneas y no las interpreta	Posee dificultades a la hora de organizar la información sobre el proceso seguido en la resolución de un problema. Da una solución pero no tiene problema para interpretarla.	Expresa el proceso seguido en la resolución de un problema. Da un valor de solución y lo interpreta en su contexto.	Expresa de forma clara el proceso seguido en la resolución de un problema. Destaca los datos clave, el planteamiento seguido, y la solución obtenida. Interpreta la solución en su contexto.

Ítem	Cr. ev.	1	2	3	4
Uso de herramientas **CAA, SIEE, CD**	1.11, 2.4	Manipula las herramientas aleatoriamente. No utiliza las herramientas para comprobar soluciones.	Manipula las herramientas para obtener su solución, sin proponer hipótesis. Tiene dificultades para utilizar herramientas a la hora de comprobar soluciones.	Realiza estimaciones antes de manipular las herramientas. Necesita consejo externo para evaluar la solución de un problema mediante el uso de herramientas.	Realiza estimaciones antes de manipular las herramientas que se proporcionan. Evalúa sus hipótesis conforme manipula sus herramientas. Usa herramientas para comprobar la solución de problemas.
Trabajo en grupo **CSC**	1.8, 1.10, 2.1	Distrae a los compañeros del trabajo a realizar. Se comunica de manera negativa e irrespetuosa.	Evita preguntar dudas conceptuales a sus compañeros. Se distrae, dejando a sus compañeros la realización del trabajo. En algunos casos responde y recibe comentarios de manera negativa o irrespetuosa.	Propone ideas sencillas al ahora de resolver problemas. Pregunta dudas y pone esfuerzo en organizar sus pensamientos para hacerse entender. Responde dudas de los compañeros con empatía y asertividad. Genera interés en las actividades que se realizan.	Propone hipótesis y planteamientos a la hora de resolver un problema. Responde a las dudas de sus compañeros con empatía y asertividad. Anima a buscar nuevas soluciones y generar interés en las actividades que se realizan.
Pertinencia de las intervenciones **CMCT, CAA, SIEE**	1.8, 1.10, 2.2	No realiza intervenciones. Propone soluciones al azar y no las evalúa, esperando la confirmación del docente.	Comete errores básicos de concepto a la hora de proponer soluciones o estimaciones.	Propone soluciones o estimaciones coherentes en base a los datos de los problemas. Evita evaluar sus propias soluciones, y comete el mismo error sucesivamente.	Propone soluciones o estimaciones coherentes en base a los datos de los problemas. Evalúa soluciones y estimaciones para encontrar otras más generales o precisas.

Anexo V: Rúbrica de evaluación de portafolio

Ítem	Cr. ev.	1	2	3	4
Claridad y presentación **CL, CSC**	1.1, 1.8	Faltan documentos por entregar, y el resto aparecen poco organizados. Resulta muy complicado seguir los documentos, ya sea debido al formato, letra o expresión utilizadas.	Se presentan todos los documentos, si bien no se aclara del todo cómo están organizados. La letra utilizada es difícil de seguir, y se encuentran tachones que dificultan la lectura.	Los documentos se presentan de forma organizada, limpia y clara. Hay errores menores en la expresión, y se aprecian algunos tachones que dificultan la lectura.	Los documentos se presentan de forma limpia, clara y organizada, con expresión adecuada y en un formato que facilita la lectura.
Autoevaluación **SIEE, CAA**	1.8, 1.10	La hoja de autoevaluación no se corresponde con la actuación del estudiante durante las clases y sus entregas. Las justificaciones que se hacen son escasas. Faltan aspectos a mejorar o no se valora el cambio desde el principio de la unidad didáctica.		La hoja de autoevaluación es coherente con los argumentos que se presentan y respaldada por las actividades llevadas a cabo en clase y en el portafolio. Se presentan aspectos a mejorar y se valora la mejora realizada desde el principio de la unidad didáctica.	
Coherencia en las soluciones a los problemas **CMCT, SIEE**	1.1, 2.1	Se obtiene una solución incoherente con el problema que se plantea. La solución no se interpreta en el contexto del problema.	Se intenta aplicar un algoritmo de manera mecánica, demostrando falta de comprensión del problema o en la interpretación de la solución.	Existen errores menores en la solución de los problemas, si bien las soluciones o estimaciones que se presentan son coherentes con la situación del problema.	Las soluciones son correctas, y se interpretan dentro del contexto del problema en cuestión. Se utilizan modelos visuales, si corresponde, para visualizar la solución obtenida.
Expresión de la solución **CL, CMCT**	1.1, 1.2, 2.1	Denota falta de organización a la hora de expresar la resolución de un problema. Da soluciones erróneas y no las interpreta	Posee dificultades a la hora de organizar la información sobre el proceso seguido en la resolución de un problema. Comete errores conceptuales a la hora de modelizar la información.	Expresa de forma organizada el proceso seguido en la resolución de un problema. Utiliza, con errores menores de concepto, recursos matemáticos para modelizar la situación.	Expresa de forma clara y concisa el proceso seguido en la resolución de un problema. Pone de relieve los datos clave, el planteamiento seguido, y la solución obtenida. Utiliza adecuadamente conceptos matemáticos para modelizar la situación y facilitar la resolución del problema.

Ítem	Cr. ev.	1	2	3	4
Modelización del problema **CMCT**	1.6, 2.1	El estudiante utiliza y opera los datos de manera algorítmica, sin tener en cuenta la posición que ocupan en el problema.	El estudiante demuestra errores conceptuales a la hora de utilizar recursos matemáticos para modelizar el problema.	El estudiante utiliza recursos matemáticos para modelizar los datos del problema, si bien en ocasiones no reconoce cuáles son los datos clave.	El estudiante diferencia los datos principales de los irrelevantes, y utiliza recursos matemáticos apropiados para modelizar matemáticamente el problema.
Resolución matemática **CMCT**	1.6, 2.1, 2.3	El estudiante utiliza técnicas incoherentes con el planteamiento del problema, manipulando los datos sin razonar a qué corresponde cada operación.	El estudiante comete errores graves al trabajar con números racionales, dando lugar a soluciones incoherentes con el problema en cuestión.	El estudiante comete errores menores al trabajar con números racionales, si bien estas operaciones son adecuadas para la resolución del problema.	El estudiante demuestra competencia utilizando conceptos, propiedades y operaciones con los números racionales para resolver el problema en el campo matemático.
Representación de fracciones	1.11, 2.1	Muestra errores básicos a la hora de interpretar o representar fracciones en varios modelos.	Muestra errores en la representación de recta. Interpreta y representa fracciones en un modelo de área.	Representa e interpreta, con errores menores, fracciones en distintos modelos.	Representa e interpreta fracciones utilizando los applets, en modelos gráficos y de recta.
Operaciones con fracciones	1.11, 2.1, 2.3, 2.4.	No puede operar o estimar el resultado de una operación, ni utilizar herramientas que faciliten esta tarea.	Necesita utilizar herramientas para estimar u operar fracciones.	Estima operaciones simbólicas con fracciones, y puede utilizar modelos para operarlas.	Opera correctamente fracciones y números mixtos de forma simbólica y gráfica.
Comparación, fracciones equivalentes y simplificación	1.11, 2.1, 2.4	Demuestra dificultades comparando fracciones, encontrando fracciones equivalentes o simplificando.	Puede utilizar herramientas para comparar, encontrar fracciones equivalentes o simplificarlas.	Puede utilizar los algoritmos propuestos para comparar fracciones, encontrar fracciones equivalentes, o simplificarlas.	Posee estrategias (intuitivas y mediante algoritmos) para comparar fracciones, encontrar fracciones equivalentes o simplificarlas.

Anexo VI: Rúbrica de autoevaluación

Ítem	1	2	3	4	Argumentación
Trabajo diario	Pierdo tiempo en clase, y conozco los errores de mis actividades, pero no los resuelvo.	Pierdo parte del tiempo de clase, y aún puedo completar algunas de las actividades propuestas.	He dejado atrás algunas actividades por dudas que no he sabido responder.	Realizo las actividades y problemas día a día, y estudio, corrijo y resuelvo los errores que se me plantean.	
Participación en las clases	Me distraigo y no presto atención cuando hablan mis compañeros o el profesor.	Sigo las clases, pero evito intervenir, por miedo al ridículo o a hablar en público.	He intervenido al menos una vez en las sesiones, proponiendo una solución o planteando dudas.	Pregunto dudas a mis compañeros y al profesor, e intervengo activamente en clase.	
Planteamiento y solución de los problemas	Tengo dificultades para organizar los datos y el planteamiento de un problema.	Puedo realizar los cálculos de un problema, pero no los justifico. Doy la solución como un número aislado.	Escribo los datos y cómo llego a la solución de mis problemas. Doy la solución en contexto.	Escribo los datos de mis problemas, el planteamiento y la solución, compruebo si es correcta, e interpreto el resultado en su contexto.	
Planteamiento de hipótesis	No me planteo qué forma debe tener mi resultado y por qué.	Necesito manipular las herramientas y realizar cálculos para empezar a ver cómo tiene que ser la solución.	Pienso cuánto tiene que dar la actividad, pero no compruebo el final en qué medida me había equivocado.	Estimo cuánto me va a dar la solución antes de resolver una actividad o problema, y comparo el resultado con mi predicción.	
Uso de herramientas	No puedo relacionar las herramientas que se ofrecen con los problemas que se plantean.	Utilizo los applets aleatoriamente hasta encontrar la solución de mis problemas.	Cuando tengo dudas, uso los applets para comprobar mis soluciones.	Pienso inicialmente cómo debo manipular los applet para poder llegar a mi solución. Compruebo mis soluciones de los problemas y ejercicios utilizando los modelos gráficos.	
Participación propia en el grupo.	Evito preguntar dudas a mis compañeros. Me distraigo y tengo dificultades para realizar mi parte del trabajo.	Evito preguntar dudas y me preocupa plantear soluciones equivocadas. Realizo mi parte del trabajo escrito.	Me cuesta comunicarme con mi grupo, pero nos coordinamos para realizar las actividades que se piden.	Participo activamente en mi grupo planteando o resolviendo dudas, proponiendo ideas y realizando los trabajos.	

<table>
<tr><th colspan="2">Ítem</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>Argumentación</th></tr>
<tr><td colspan="2">Organización del trabajo en grupo</td><td>Nos distraemos constantemente.
Mis compañeros no prestan atención.
Algunos compañeros hablan de forma agresiva y no dejan lugar al debate.</td><td>La carga de trabajo en mi grupo está muy polarizada.
A veces hay tensión y la comunicación no es fluida.</td><td>En mi grupo, las mismas personas suelen explicar qué hay que hacer y organizar el trabajo.</td><td>En mi grupo todos nos ayudamos entre nosotros, la carga de trabajo está bien repartida, rotamos en los roles, y nos comunicamos de forma asertiva y constructiva.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="6">Contenidos:
¿Qué sabes hacer sobre…?
¿Qué crees que te falta?
¿Cómo puedes resolverlo?</td><td>Representación de fracciones</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>Fracciones propias e impropias</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>Comparación de fracciones.</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>Fracciones equivalentes.</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>Simplificación de fracciones.</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td>Sumas y restas con fracciones.</td><td colspan="5"></td></tr>
<tr><td colspan="7">A partir de lo escrito, ¿qué crees que puedes hacer para mejorar?</td></tr>
</table>

Anexo VII: Cuestionario de evaluación del proceso

Aspecto a valorar	Valoración					Comentarios
	1	2	3	4	5	
El ritmo y las actividades de clase eran adecuados.						
Las clases resultaban entretenidas.						
La enseñanza virtual ha hecho que las clases resulten más difíciles.						
La carga de trabajo era adecuada.						
Los recursos digitales eran útiles para entender los conceptos						
Los applets eran fáciles de utilizar.						
La comunicación en clase ha sido correcta, y los debates interesantes.						
El profesor prestaba atención sobre las dudas, y las resolvía con claridad.						
Lo que he aprendido me resultará útil en mi vida diaria.						
Me ha gustado trabajar en grupo.						
En general, a este tema le pongo como nota un…						

Lo que más me ha gustado de esta unidad ha sido…

Lo que menos me ha gustado de esta unidad ha sido…

Sugerencias futuras:

Anexo VIII: Imágenes de las actividades de las sesiones en GeoGebra Classroom

Sesión 1

Autor: Diego Acedo

Responde las siguientes preguntas:

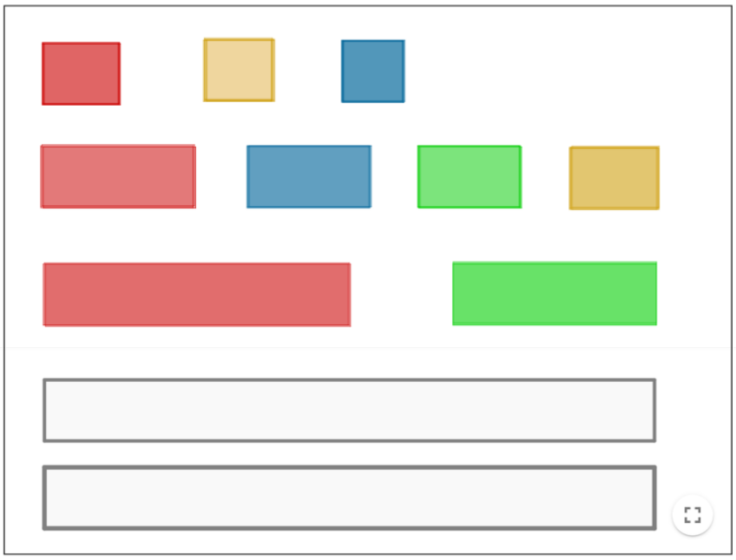
1) ¿Cuántas **tiras rojas grandes** necesitas unir para formar un rectángulo gris?

2) ¿Y cuántas **tiras verdes grandes**?

3) ¿Y cuántas **tiras azules pequeñas**?

4) ¿Y cuántas **tiras rojas pequeñas?**

Ingresa aquí tu respuesta...



¿Qué fracción representa...

1) ...una **tira azul grande**?

2) ...una **tira roja mediana**?

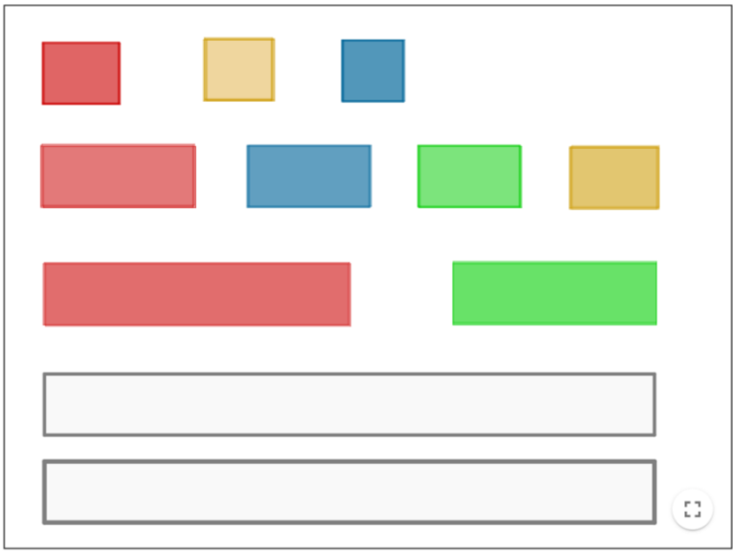
3) ...una **tira verde pequeña**?

4) ¿Qué fracciones representan las tiras del ejercicio anterior?

Rellena en tu cuaderno el siguiente cuadro.

Ingresa aquí tu respuesta...

Pieza	Fracción
Pieza roja grande	
Pieza verde grande	
Pieza roja mediana	
Pieza azul grande	
Pieza verde pequeña	
Pieza amarilla grande	
Pieza roja pequeña	
Pieza amarilla pequeña	
Pieza azul pequeña	



¿Qué fracción representan...

1) ...**dos** tiras **verdes grandes**?

2) ...**tres** tiras **azules grandes**?

3) ...**cuatro** tiras **verdes pequeñas**?

Ingresa aquí tu respuesta...

Representa a continuación las siguientes fracciones.

a) $\frac{2}{3}$

b) $\frac{1}{6}$

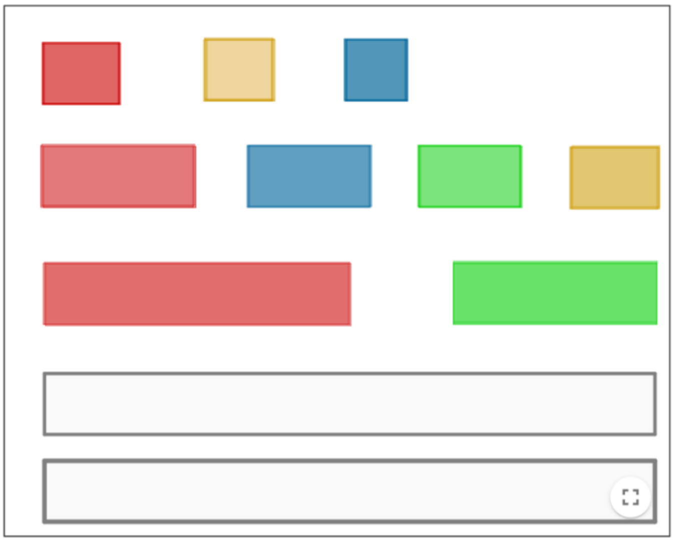
c) $\frac{4}{5}$

Session 2

Autor: Diego Acedo

Activity 1.1

Look out! Your teacher is giving you some fractions! Can you be the first to represent them?



Activity 1.2

In your notebook, complete the table from session 1 with the names of fractions in english.

Activity 1.3: Play with your group!

Propose a fraction in english to your group. The first to represent the fraction gets one point and proposes the next fraction.

Activity 2: Day trip!

The people in this class are doing a school trip!
We are going to El Picacho mountain, in Alcalá de los Gazules.
The high school gives us 21 sandwiches in total. The class is divided into three groups:

1) Five are going to the lake.

2) Six are going walking in the mountain.

3) Four are going to see the waterfall.

Now, we need to share the sandwiches... but every person should get the same amount of sandwich!

How many sandwiches should we give to each group?

(*Tip: You can break the sandwiches into pieces... but how many pieces?)*

BONUS: What if we only have 13 sandwiches?

Ingresa aquí tu respuesta...

Session 3

Autor: Diego Acedo

Activity 1: Pizza night!

Your group is going to Pizzeria Verona to celebrate that summer is coming!

But... in pizzeria Verona, you can buy portions or whole pizzas.

1) One portion costs 1 euro.

2) One whole pizza costs 6 euros, and it has 8 portions.

Question 1: Talk with your group: how many portions does each of you want to eat?

Question 2: You don't want to waste any money... how should you buy the portions to make it cheap?

Later you will have to present your solution to the class!

Tip: Think about it... how can you express mathematically "one portion of a pizza"?

This is **a whole** pizza.

Improper fractions and mixed numbers

In the previous problem:
How many portions can you obtain from a whole pizza?
And from two pizzas?
What about five pizzas?

What fraction of a pizza is 1 portion?
What fraction of a pizza are 6 portions?
What fraction of a pizza are 12 portions?

Definition:
A fraction is **proper** if the numerator is **smaller than** the denominator.

A fraction is **improper** if the numerator is **greather than** the denominator.

Example:

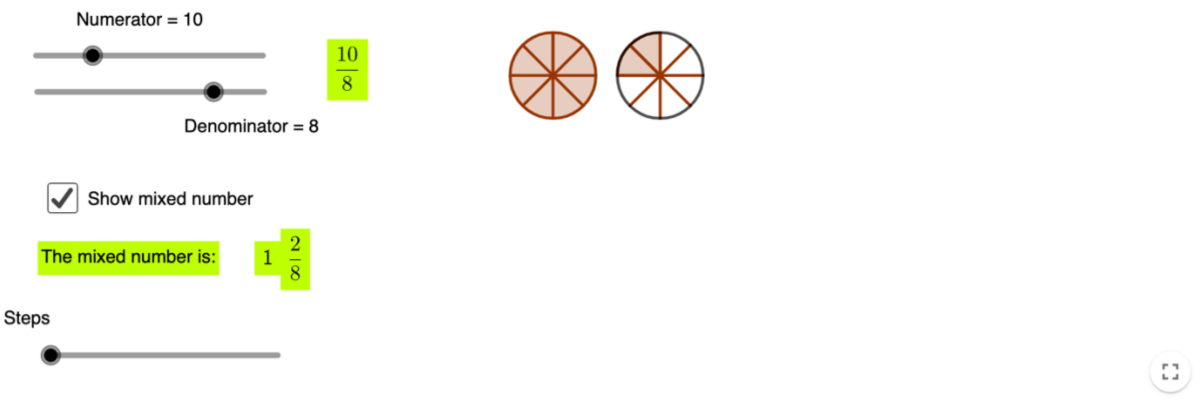
Having $\frac{10}{8}$ of pizza is the same as having 1 whole pizza and $\frac{2}{8}$ from another one!

Definition:

A **mixed number** is a way to represent improper fractions, counting the number of units and the portions left.

Example:

The mixed number $1\,\frac{2}{8}$ represents one whole pizza and $\frac{2}{8}$ of a pizza.



Activity 2: How much pizza is...?

1) $\frac{5}{4}$ of a pizza.
2) $\frac{10}{2}$ of a pizza.
3) $\frac{25}{6}$ of a pizza.
4) $\frac{8}{8}$ of a pizza.

Tip: You can use the previous applet!

BONUS: *Can you find a way to find mixed numbers from improper fractions without using the applet?*

Ingresa aquí tu respuesta...

Activity 3: How many portions are...?

1) $2\,\frac{2}{8}$ pizzas.
2) $3\,\frac{1}{2}$ pizzas.
3) $\frac{7}{8}$ pizzas.
4) $5\frac{3}{7}$ pizzas.

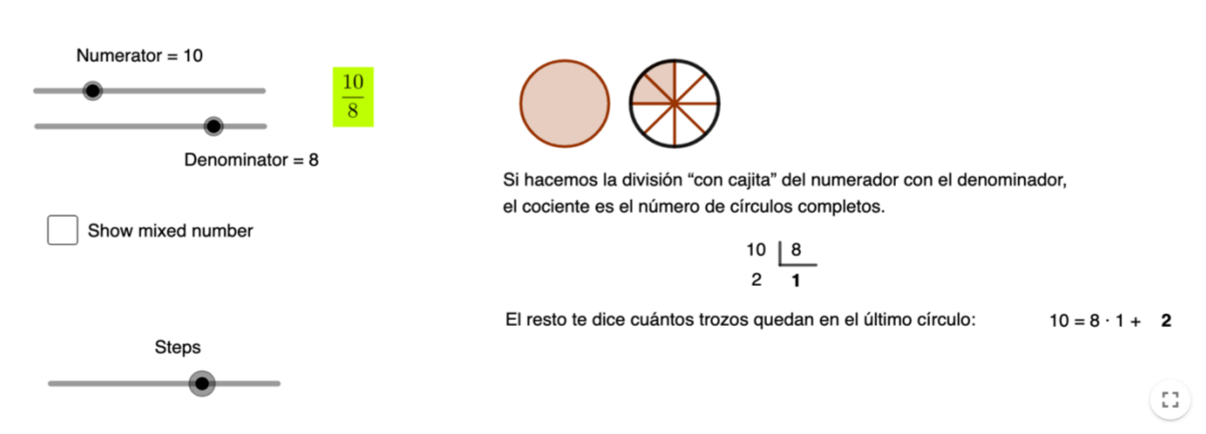
Question: Do the portions have the same size in all the previous cases? How can you tell about the size?

Tip: You can use the previous applet!

BONUS: *Can you find a way to find mixed numbers from improper fractions without using the applet?*

Ingresa aquí tu respuesta...

Use the slider "Steps" to learn how to translate a improper fractions to a mixed number!



Activity 4:

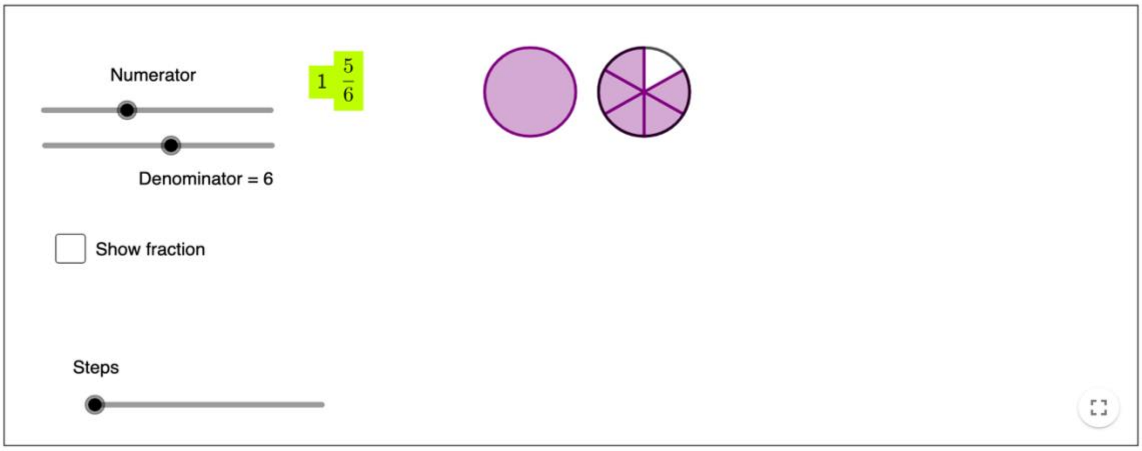
Translate the fractions to mixed numbers. Once you do it, check your solution using the applet.

1) $\frac{10}{7}$
2) $\frac{12}{9}$
3) $\frac{14}{3}$
4) $\frac{9}{2}$

Free offer! The chef in pizzeria Verona offers to give you one of the previous amounts of pizza for free! Which one do you choose? Why?

Ingresa aquí tu respuesta...

Use the slider "Steps" to learn how to turn a mixed number into an improper fraction!



Activity 5

Translate the mixed numbers to fractions. When you finish, check your solutions using the applet.

1) $2\frac{3}{4}$
2) $3\frac{1}{8}$
3) $1\frac{1}{5}$
4) $5\frac{1}{3}$

Free offer! The chef in pizzeria Verona offers to give you one of the previous amounts of pizza!
Which one do you choose? Why?
Ingresa aquí tu respuesta...

Session 4

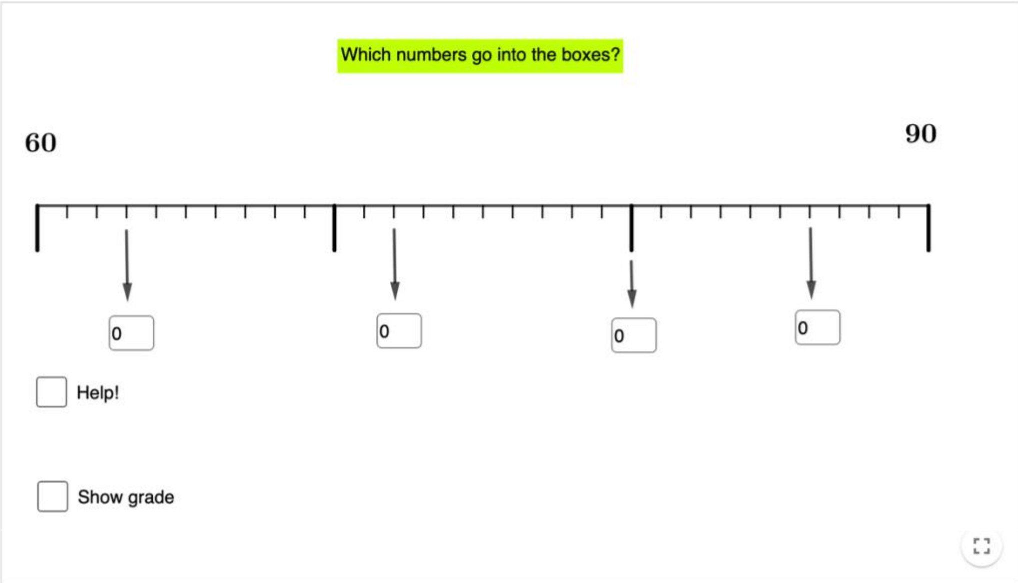
Autor: Diego Acedo

Let's stop learning fractions for a moment...

Let's just count! Try solving the following exercise:

Tip: When you finish, look at your grade! You can also use some help!

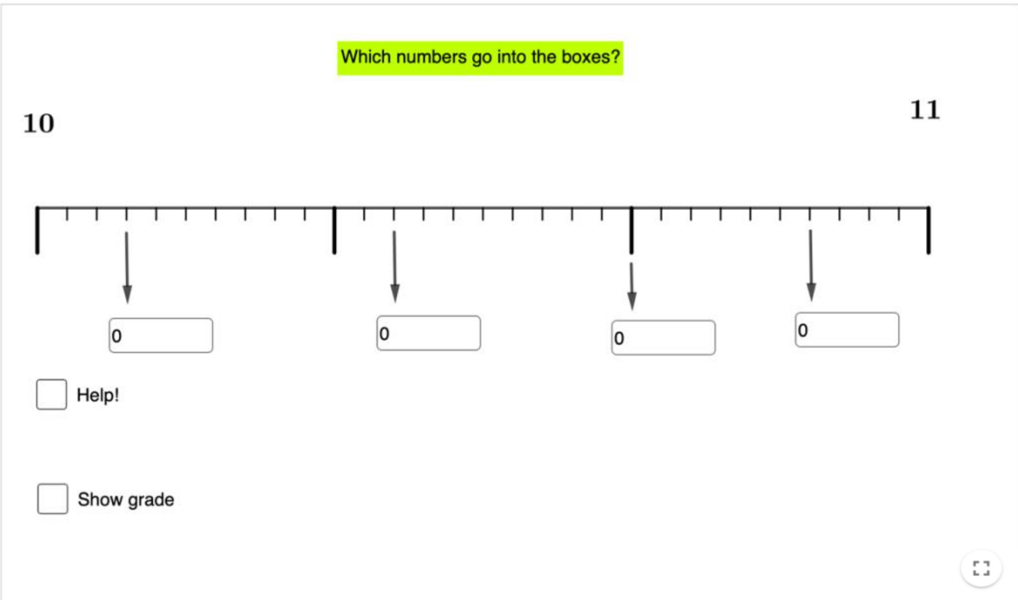
Activity 1.1. Put the correct numbers in the boxes



Activity 1.2. Back to fractions!

We can count properly from 60 to 90... can we now count from 10 to 11?
Discuss it with your group!

Tip: There are different ways to do the next exercise. Try to find as many as you can!



How did you solve the exercise? (Puedes responder en castellano)

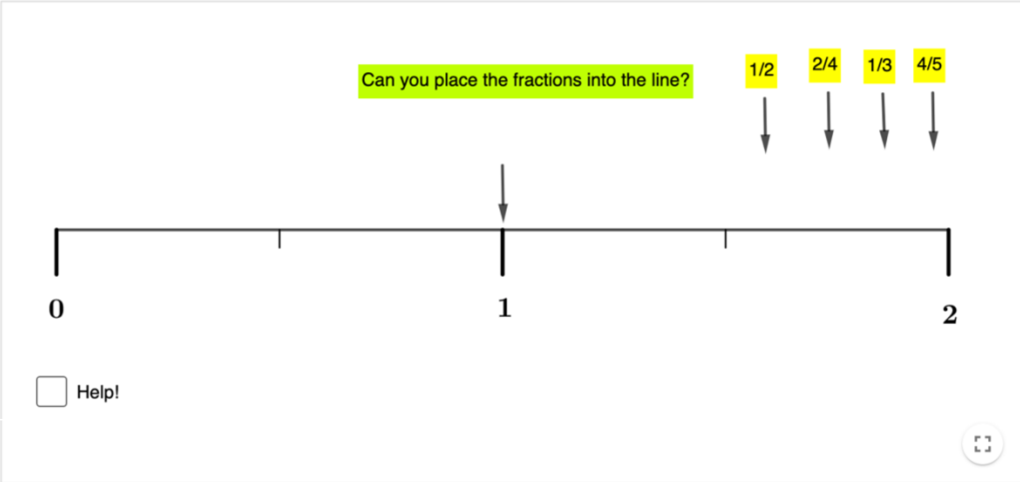
Ingresa aquí tu respuesta...

Representing on the real line

We can divide a **line** into equal pieces! Fractions help us to place points on the line.

Be careful! **One unit is the interval of length 1**.

Activity 2.1. Try to place the following fractions on the line



Activity 2.2

Represent the following fractions in the next applet.

1) $\frac{2}{3}$

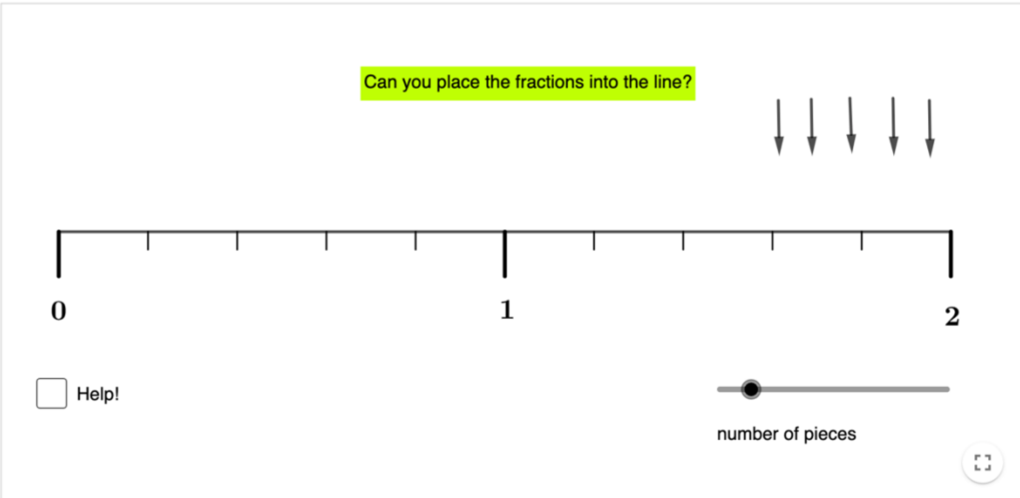
2) $\frac{3}{4}$

3) $\frac{5}{6}$

4) $\frac{7}{5}$

5) $1\frac{1}{5}$

Which fraction is **the greatest**? And **the smallest**?



Activity 3: La paradoja de Zenón y el movimiento.

¿Conoces las paradojas de Zenón?
Utilizando el infinito, ¡los griegos ya demostraron que no es posible moverse!
Quizás ahora estarás diciendo: *"estos matemáticos están un poco locos…".* Vamos a comprobar a continuación cuánto y cómo de locos.

Actividad:
a) Buscad, entre todos los miembros del grupo, información sobre las paradojas de Zenón, y por qué resultan importantes en la filosofía y las matemáticas.

b) Centrémonos en la paradoja de la **dicotomía.** Comentad la paradoja, y posicionad sobre el siguiente applet las diferentes posiciones que aparecen en la paradoja. ¿Qué fracción del tramo representa cada posición?
Consejo: Haz una foto o captura de pantalla del resultado.

c) Comentadla y debatid en grupo: un miembro deberá criticarla, mientras que otro deberá defender la paradoja. Cada miembro restante deberá apuntar las ideas clave de cada argumento.

d) ¿Qué pensáis de la paradoja? Comentad, cada miembro del grupo, qué os parece (positiva o negativamente, pero de forma justificada),

Cada grupo deberá enviar un archivo en Word que contenga los cuatro puntos desarrollados.

Ingresa aquí tu respuesta...

Session 5

Autor: Diego Acedo

Liga ACB · 15/6/19 Finalizado

Real Madrid	87	-	67	Barça

Final

Equipo	1	2	3	4	T
Real Madrid	22	25	16	24	87
Barça	17	15	20	15	67

REAL MADRID BARÇA **ESTADÍSTICAS** NOTICIAS

ESTADÍSTICAS DE EQUIPO

Real Madrid		Barça
28/57	Tiros de campo	23/64
49.1	%	35.9
13/31	Triples	6/21
41.9	%	28.6
18/21	Tiros libres	15/15
85.7	%	100.0

Activity 1: Basketball game! (You may answer in spanish)

It's the finals! Real Madrid - FCBarcelona.

After a close game, the final statistics appear in the following image.

As basketball experts, you and your group are discussing the ending statistics. Solve the following questions:

a) What do each of the statistics mean?

b) Which team **hit more field shots**? And **triples**? And **free shots**?

d) Which team had better **aim** in each case?

c) What kind of shots are harder to hit (field shots, triples, free shots)? Can you see that in the statistics?

d) The commentator says: "*The second quarter was really good for Real Madrid, they scored more than* $\frac{1}{4}$ *of the total points!*" Is that correct? Why?

e) Another commentator says: *"Barcelona hit more than one out of three triples (uno de cada tres)!"* What does he mean? Is that correct? Why?

f) Make a small summary of the game.

Ingresa aquí tu respuesta...

Activity 2: Comparing fractions

When we compare fractions, we need to use the same unit of reference!

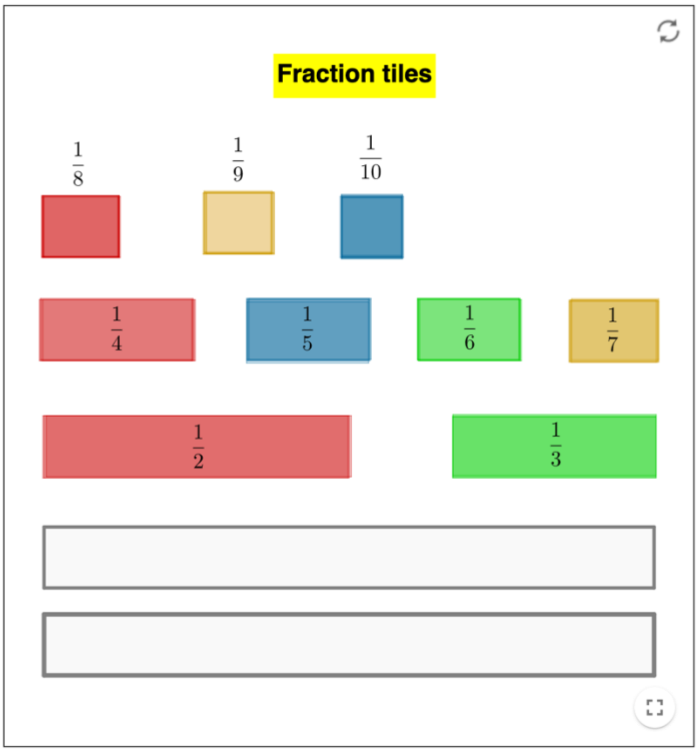
Represent and compare the following fractions.

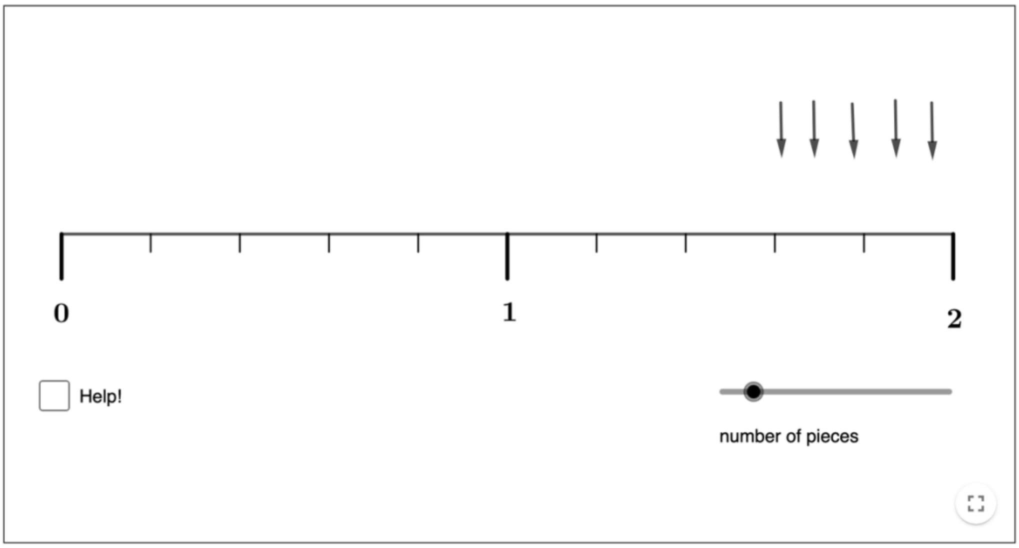
Try thinking about the result in advance! Can you find the solution using the numbers only?

1) $\frac{1}{5}$ and $\frac{1}{6}$ 2) $\frac{3}{5}$ and $\frac{4}{6}$ 3) $\frac{3}{6}$ and $\frac{1}{2}$

4) $\frac{5}{6}$ and $\frac{3}{4}$ 5) $\frac{2}{8}$ and $\frac{2}{9}$ 6) $\frac{7}{8}$ and $\frac{8}{9}$

Ingresa aquí tu respuesta...





Comparing fractions in general

To compare two fractions, we can use the **cross product rule.**

If we want to compare two fractions, we can:

a) Multiply the first numerator by the second denominator.
b) Multiply the first denominator by the second numerator.

If a) is greater, then the first fraction is greater.
If b) is greater, then the second fraction is greater.
Example:

If we compare $\frac{1}{2}$ and $\frac{3}{4}$, we have:

a) $1 \cdot 4 = 4$
b) $2 \cdot 3 = 6$

b) is greater, so $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$

Activity 3:

Compare the fractions in activity 2 using this new rule:

1) $\frac{1}{5}$ and $\frac{1}{6}$ 2) $\frac{3}{5}$ and $\frac{4}{6}$ 3) $\frac{3}{6}$ and $\frac{1}{2}$

4) $\frac{5}{6}$ and $\frac{3}{4}$ 5) $\frac{2}{8}$ and $\frac{2}{9}$ 6) $\frac{7}{8}$ and $\frac{8}{9}$

Check if your answers are correct with the previous solutions!

Ingresa aquí tu respuesta...

Session 7

Autor: Diego Acedo, EDC in Maine

Activity 2: Mixing chocolate

You are researching how to do the perfect chocolate drink. For that, you try different drinks:

1) First, you try two mixes:
- In the first mix, you put 100 ml of milk, and 200 ml of cocoa.
- In the second mix, you put 200 ml of milk, and 400 ml of cocoa.

In each case, how much drink do you get in total?
Which drink tastes more like cocoa? Why?

2) Then, you try two mixes:
- In the first mix, you put 200 ml of milk, and 450 ml of **cocoa.**
- In the second one, you put 300 ml of milk, and 400 ml of cocoa.

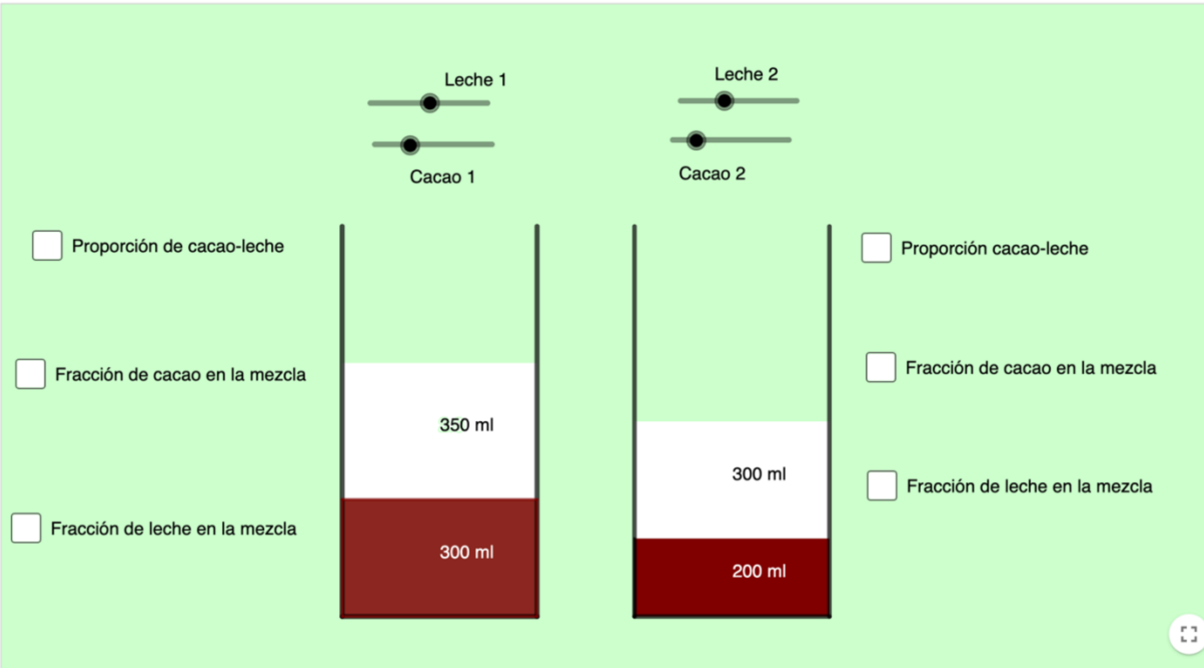
In each case, how much drink do you get in total?
Which drink tastes more like cocoa? Why?

3) Finally, you try two new drinks:
- In the first mix, you put 100 ml of milk, and 300 ml of cocoa.
- In the second mix, you put 200 ml of milk, and 400 ml of cocoa.

In each case, how much drink do you get in total?
Which drink has more cocoa?
Which mix tastes more like cocoa? Why?

In each case, how can you make the drinks taste the same?
Tip: Are there any fractions in this problem? Do we have any techniques to solve this?

Ingresa aquí tu respuesta...



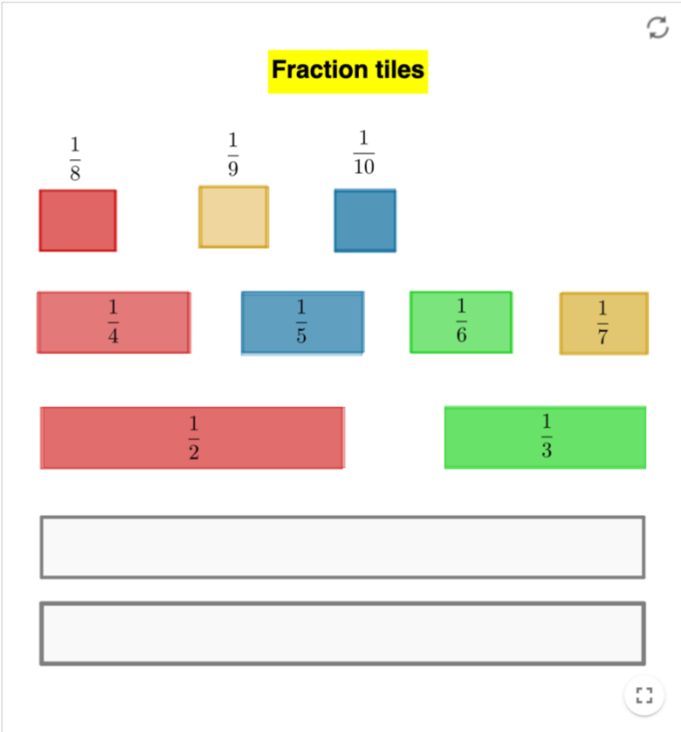
Activity 2: Finding equivalent fractions

Using the applet, try to find as many equivalent fractions as you can:

a) $\frac{2}{4}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $\frac{4}{6}$ d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{2}{3}$

What can you say about the numerators and denominators?

Ingresa aquí tu respuesta...



Finding equivalent fractions

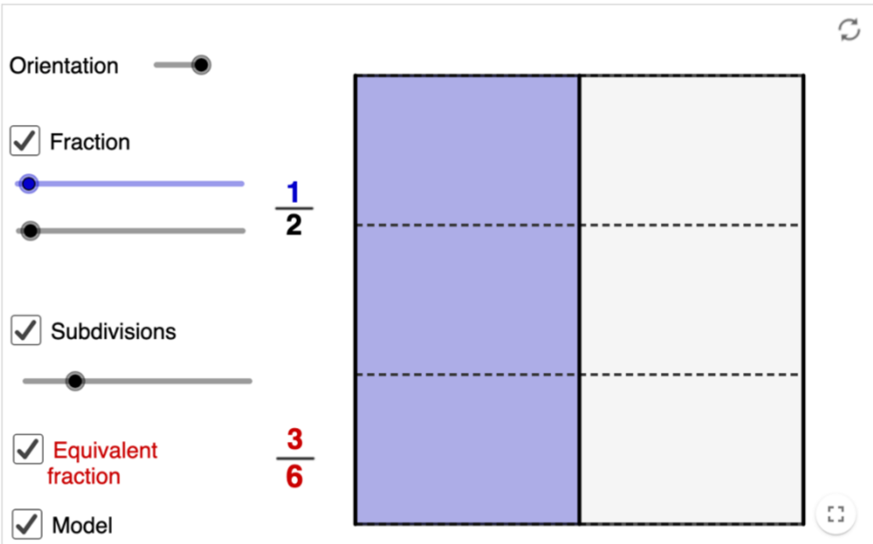
To find equivalent fractions, we can do three things:

1) Break each portion into equal parts.

2) Combine several portions in groups of the same size.

3) Do both!

How does this affect the numerator and denominator?



Activity 3: Simplifying fractions

When we combine pieces to obtain equivalent fractions, we obtain smaller numbers.
We call this **simplifying** the fraction.

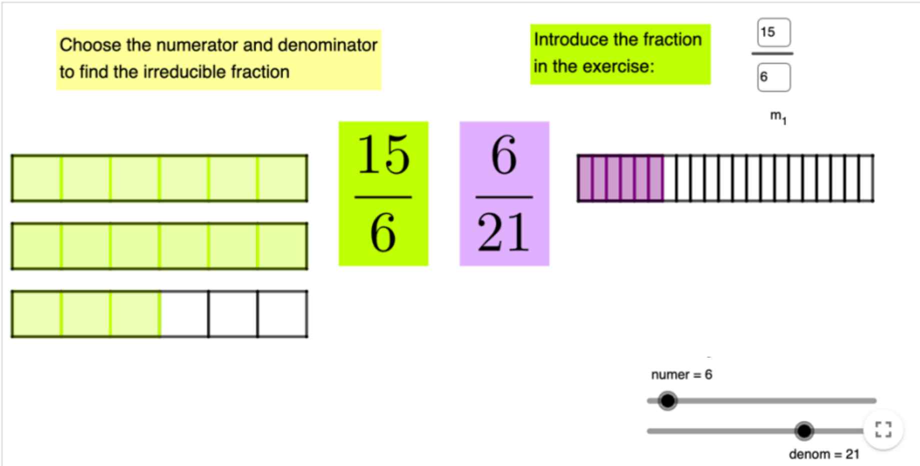
When a fraction cannot be simplified, we say that it is **irreducible.**

a) In activity 2, did you simplify any fractions?

b) Using the applet, simplify the following fractions and find the irreducible fraction:

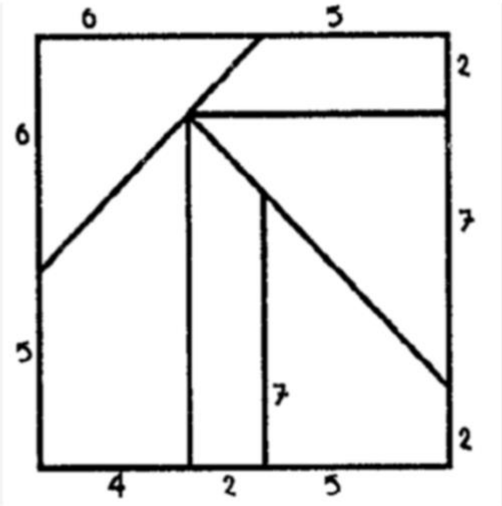
a) $\frac{7}{14}$ b) $\frac{2}{6}$ c) $\frac{22}{8}$ c) $\frac{8}{6}$ d) $\frac{14}{8}$ e) $\frac{16}{10}$

Ingresa aquí tu respuesta...



Session 8

Autor: Diego Acedo

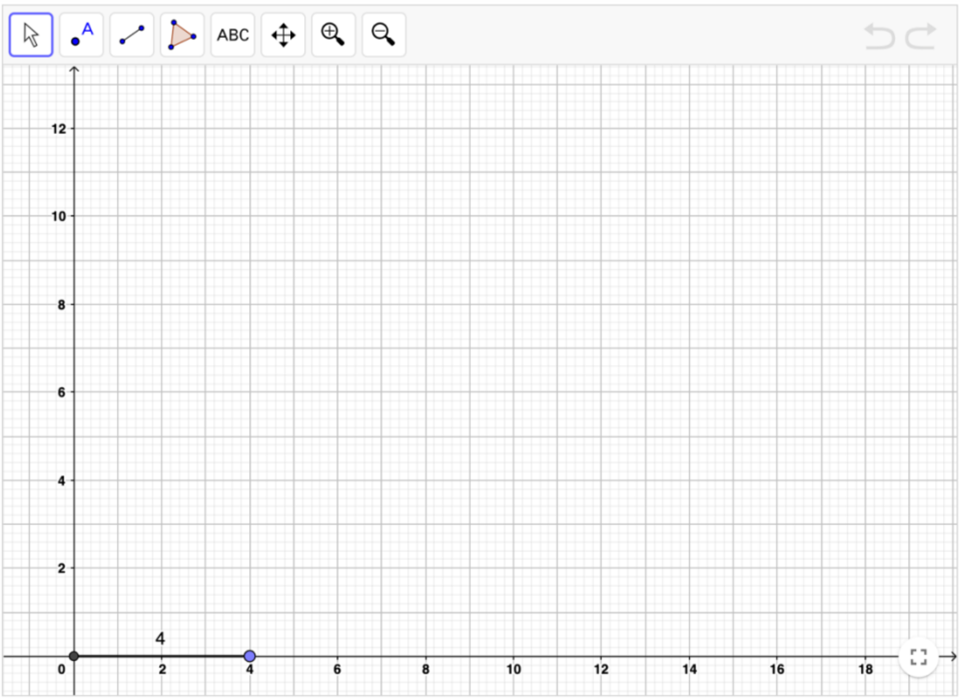


Actividad 1:

El puzzle de la imagen anterior se llama puzzle de Brousseau.

En el applet siguiente, dibuja el puzzle de Brousseau a partir del segmento ya dibujado (de longitud 4).

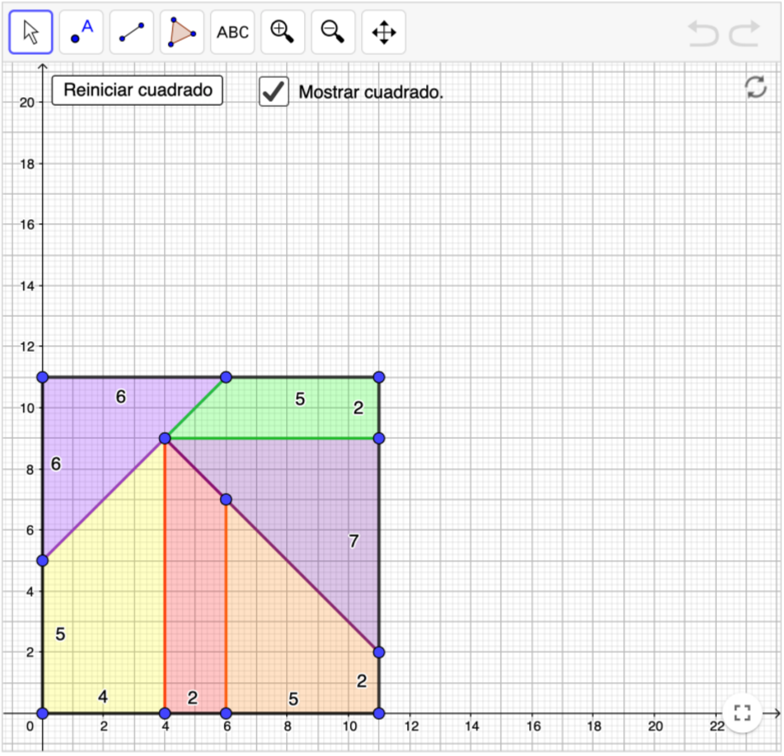
Para ello, utiliza las herramientas de la barra de navegación.



Actividad 2:

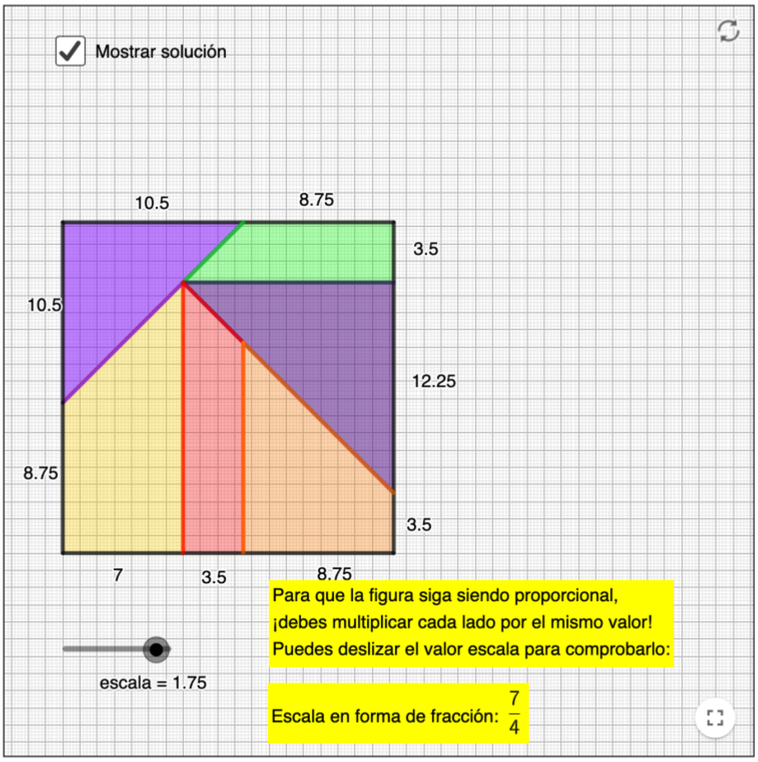
Dibuja de nuevo el puzzle anterior, pero en este caso modifícalo de forma que el lado de la figura que inicialmente medía 4 pase a medir 7.

Para ello, puedes mover los puntos azules del cuadrado que aparece, o borrar el cuadrado y dibujar un nuevo puzzle de Brousseau.



Solución.

Si haces click más abajo, en el botón "Mostrar solución", verás cómo resolver el problema.



Actividad 3: ¡Chef en casa!

a) Comenta con tus compañeros cuál es vuestra comida favorita. Acordad entre todos una de las comidas, y buscad una receta para cuatro personas, que utilice entre 4 y 7 ingredientes. Apuntad en vuestro cuaderno los ingredientes junto a las cantidades de cada uno de ellos.

b) En mi familia, según el día, venimos un número distintos de personas a comer. A veces somos 4, otras 5, otras 7, e incluso a veces como solo.
Dependiendo de cuánta gente venga a comer, ¿qué cantidad de ingredientes debería utilizar de vuestra receta?

Para responder, rellenad en vuestro cuaderno la siguiente tabla. Justificad cómo habéis calculado los ingredientes.

En la próxima sesión, un miembro de vuestro grupo deberá explicar la receta escogida, los ingredientes, y cómo habéis resuelto el problema.

Tabla a rellenar

Ingredientes	Número de comensales			
	1	4	5	7

Session 9

Autor: Diego Acedo

Actividad 1: ¡Qué hambre!

Comenzamos comentando las soluciones al problema de la sesión anterior. ¿Qué recetas habéis preparado?

The fraction of a number

Many times, as in the previous activities, we need to divide a quantity by a number, and then multiply the result by a different number. For this, we use the **fraction of a number.**

Example:

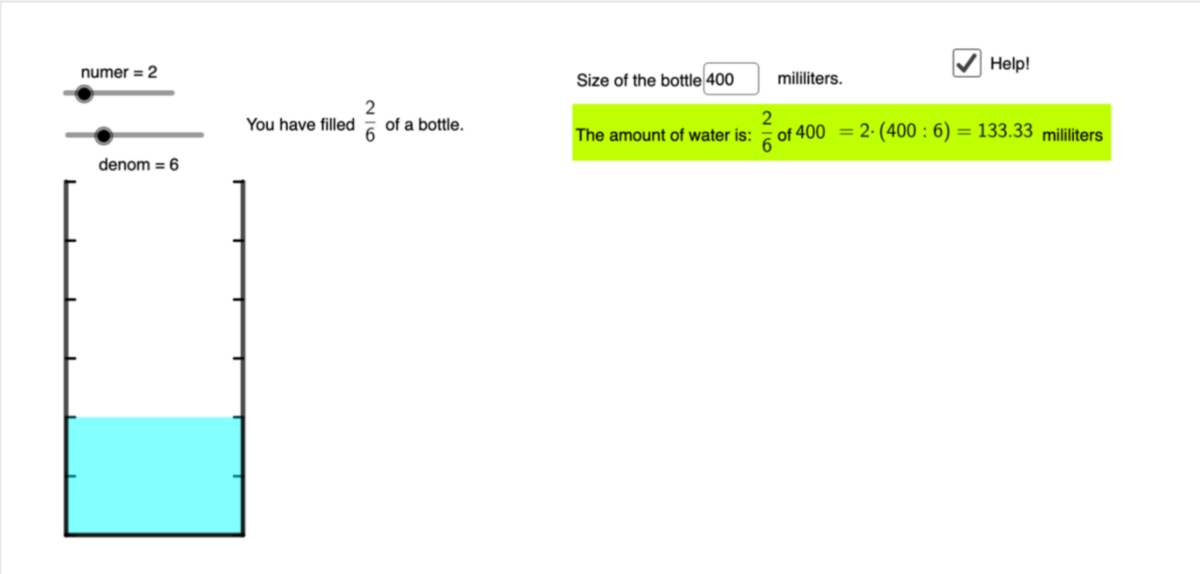
$\frac{3}{8}$ of 50 is the result of dividing 50 by 8, and then multiplying the result by 3.

$\frac{3}{8}$ of 50 = $(50:8)\cdot 3 \;=\; 6.25\cdot\; 3 \;=\; 18.75$

This is the same as multiplying by 3, and then dividing by 8:

$\frac{3}{8}$ of 50 = $(50\cdot 3):8 \;=\; 150:8 \;=\; 18.75$

Check the result in the next applet!



Activity 2:

1) You have filled $\frac{1}{2}$ of a bottle of 50 ml. How much water do you have?

2) You have filled $\frac{2}{3}$ of a bottle of 200 ml. How much water do you have?

3) You have filled $\frac{4}{6}$ of a bottle of 150 ml. How much water do you have?

4) You have $1\frac{1}{4}$ bottles of 200 ml. How much water do you have?

Bonus: Find all possible ways to solve part 4). Can you express that number in a different way?

Tip: Use the previous applet to check your solutions! Do they make sense?

Ingresa aquí tu respuesta...

Activity 3:

Let's turn this around!

1) You put 50 ml of water in a bottle of 200 ml. What part of the bottle is filled?

2) You put 100 ml of water in a bottle of 300 ml. What part of the bottle is filled?

3) You put 20 ml of water in a bottle of 50 ml. What part of the bottle is filled?

Simplify your fractions!

Ingresa aquí tu respuesta...

Activity 4:

1) You put 50 ml of water inside a bottle, and notice that 2/5 are filled. What is the size of the bottle?

2) You put 20 ml of water inside a bottle, and notice that 3/5 are filled. What is the size of the bottle? Is it bigger than the previous one? Does it make sense?

3) You have 500 ml of water, but one bottle is not enough! You need some other bottles!
When you finish, you notice that you have filled 3 and a half bottles. What is the size of one bottle?

Ingresa aquí tu respuesta...

Session 10

Autor: Diego Acedo

Activity 1: Adding fractions

Adding fractions corresponds to putting pieces together.

Represent the the following operations using the applet. What fraction is represented in the end? Can you simplify the result?

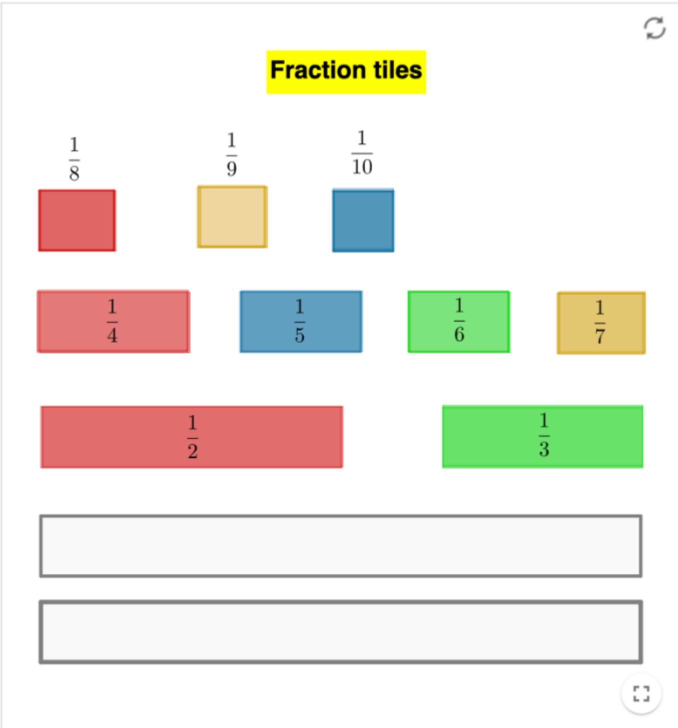
1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=$

2) $\frac{1}{4}+\frac{2}{4}=$

3) $\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=$

4) $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=$

Ingresa aquí tu respuesta...



Activity 2:

To subtract two fractions, we take away the second fraction from the first fraction
How can we represent this using the applet? Try representing the following subtractions:

1) $\frac{2}{5}-\frac{1}{5}=$

2) $\frac{3}{7}-\frac{1}{7}=$

3) $\frac{2}{6}-\frac{1}{3}=$

Ingresa aquí tu respuesta...

Adding and subtracting

Fractions with the same denominator use the same pieces!
When we add or subtract them, we only add or subtract the number of pieces.

To add or subtract fractions with the same denominator, we keep the denominator, and add or subtract the numerators.

Example: *Try representing the following operations, to check that they are correct!*

$$\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{2+1}{5}=\frac{3}{5}$$

$$\frac{4}{5}-\frac{2}{5}=\frac{4-2}{5}=\frac{2}{5}$$

What happens in the real line?

We can also add fractions on the real line! Use the following applet to represent the following additions:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=$

b) $\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=$

c) $\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=$

Activity 3: Additions on the line

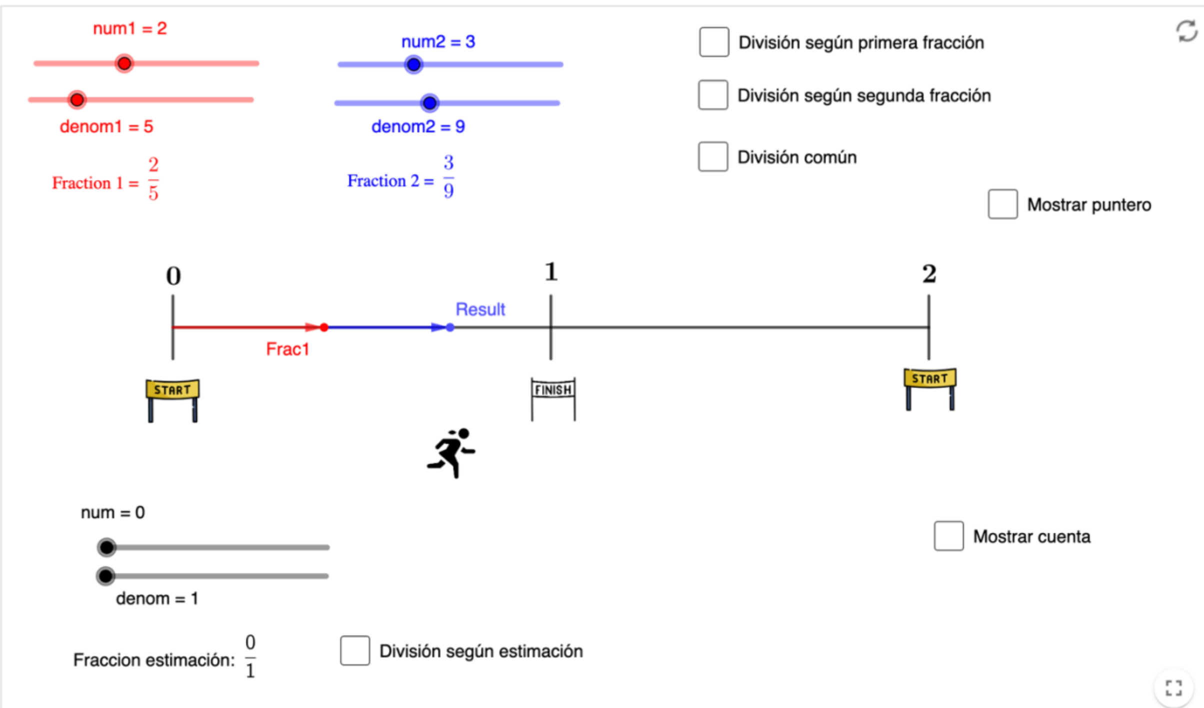
We can also add fractions on the real line! Use the following applet to represent the following additions:

a) $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=$

b) $\frac{1}{6}+\frac{3}{6}=$

c) $\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=$

Ingresa aquí tu respuesta...



Activity 4: Subtractions on the line:

Represent the following subtractions with the next applet:

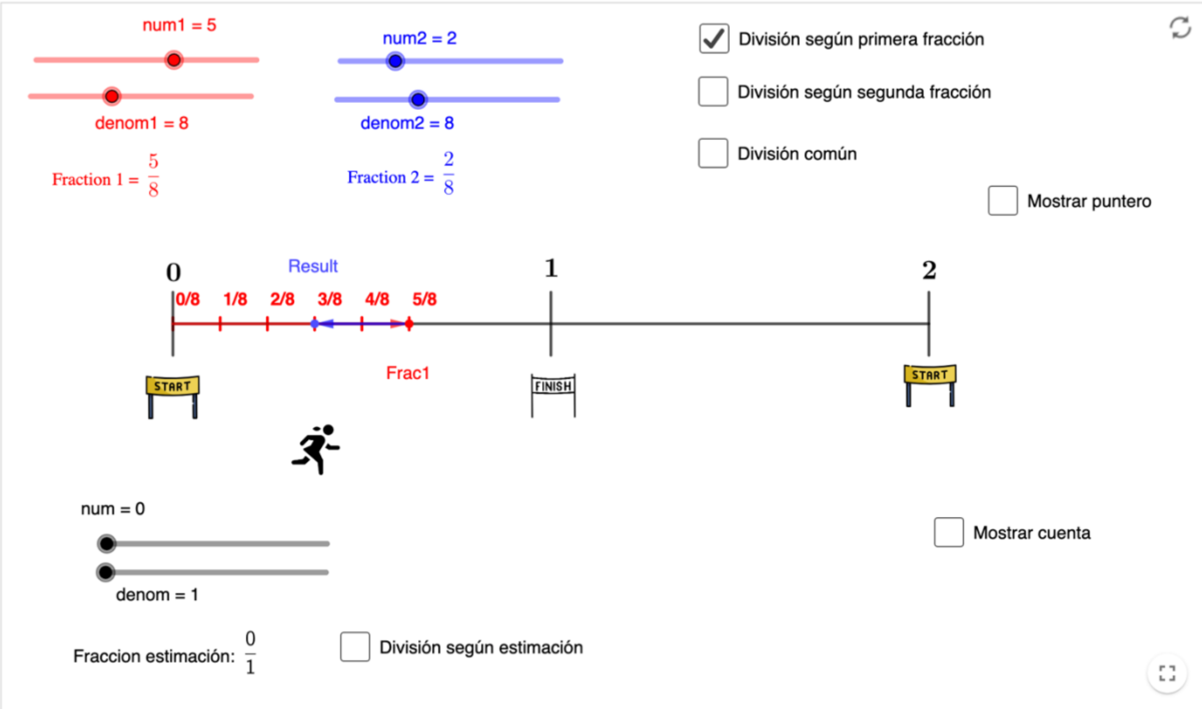
1) $\frac{3}{5} - \frac{1}{5} =$

2) $\frac{5}{7} - \frac{3}{7} =$

3) $\frac{9}{10} - \frac{3}{10} =$

Ingresa aquí tu respuesta...

Fraction subtraction



Session 11

Autor: Diego Acedo

Activity 1: Adding and subtracting fractions, v2.

Represent the following operations using the applet.

Using rectangles of the same size, can you obtain the same length in the second grey rectangle?

If you can't find the exact result, write down the closest solution.

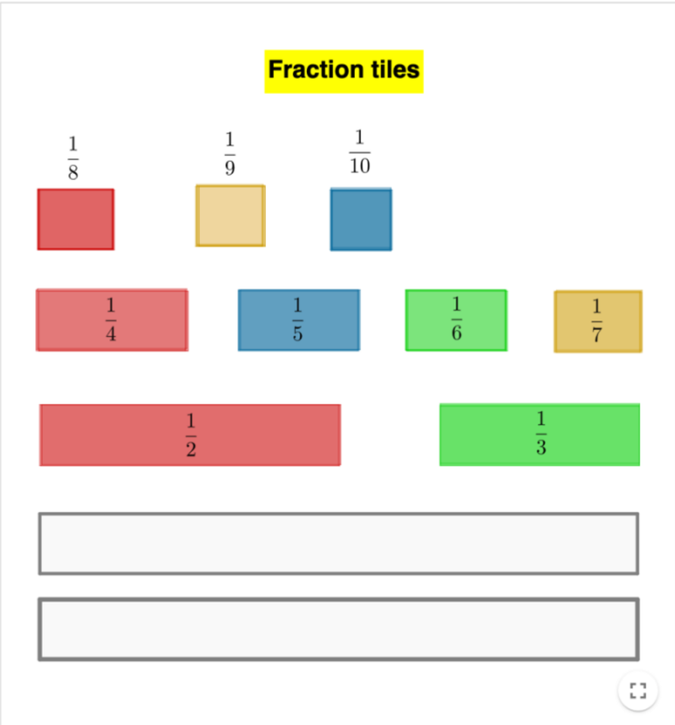
1) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} =$

2) $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} =$

3) $\frac{2}{3} - \frac{2}{6} =$

4) $\frac{5}{9} - \frac{1}{3} =$

Ingresa aquí tu respuesta...



Activity 2: Adding and subtracting fractions on the line, v2.

Represent the following operations using the applet.

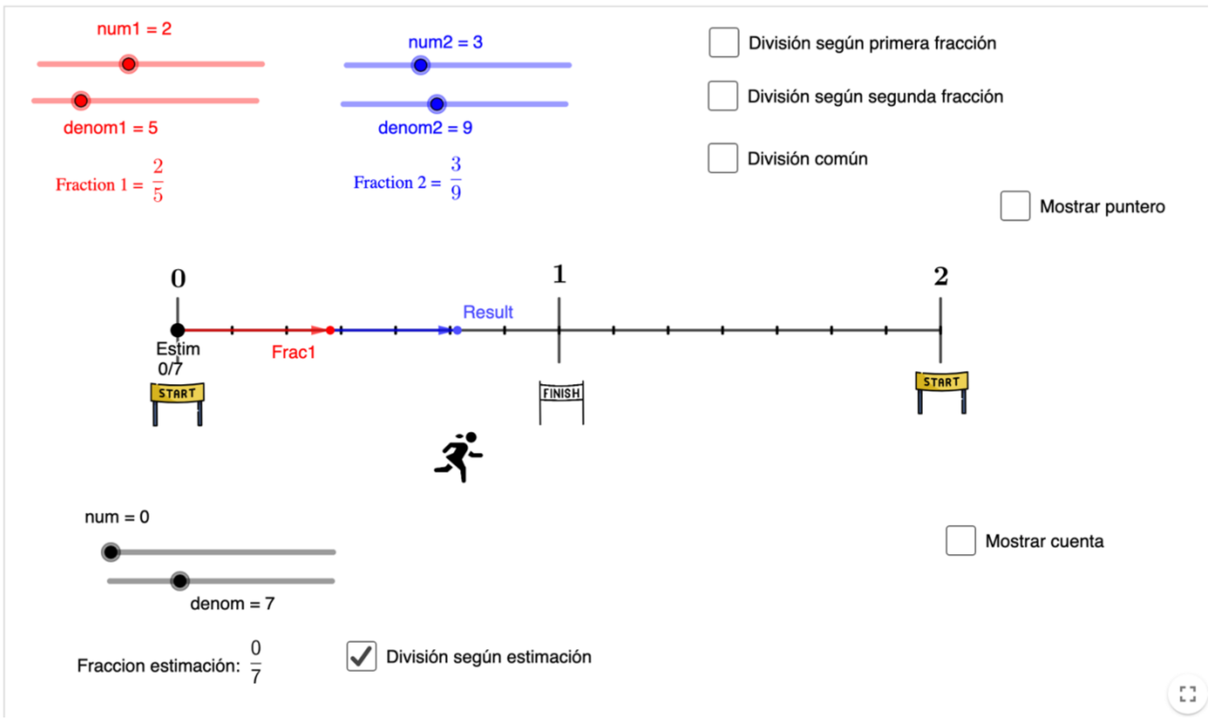
Using the button "Estimación", try to get as close as possible to the result.

1) $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} =$ 2) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} =$ 3) $\frac{5}{7} + \frac{2}{4} =$

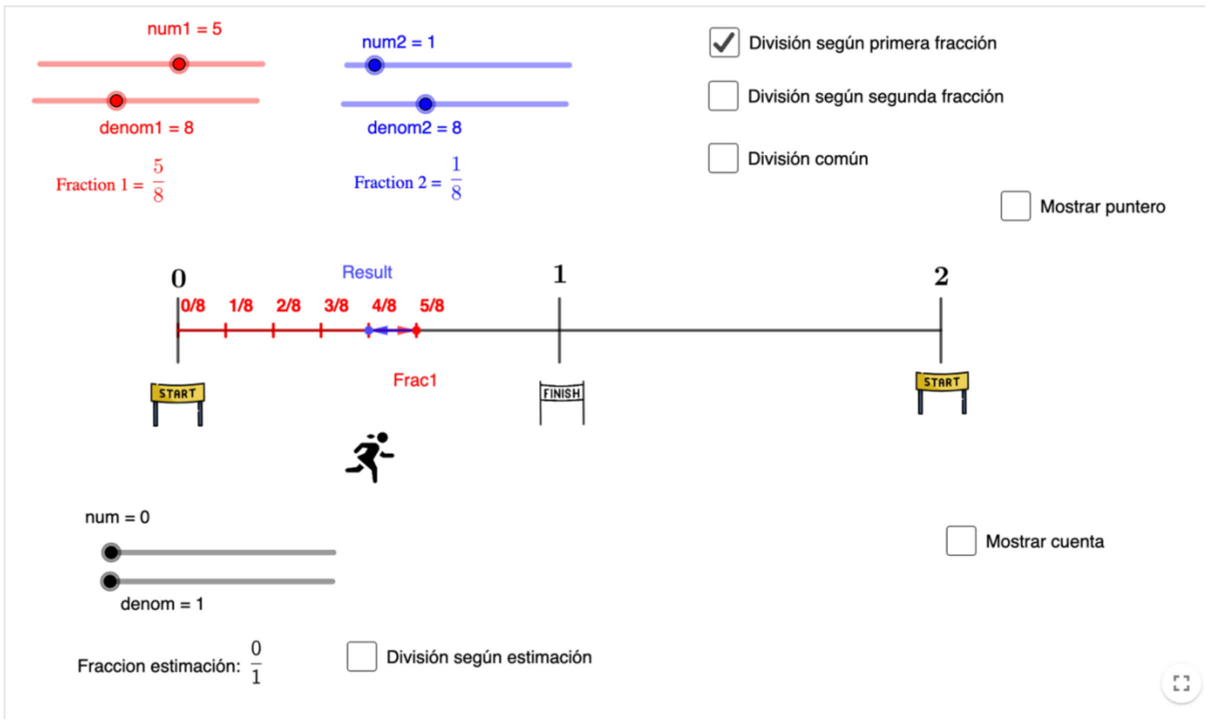
4) $\frac{3}{2} - \frac{2}{3} =$ 5) $\frac{1}{2} - \frac{4}{7} =$ 6) $\frac{10}{8} - \frac{1}{9} =$

Ingresa aquí tu respuesta...

Adding



Subtracting



Adding and subtracting fractions with different denominators

When we add or subtract fractions, **the pieces that we use must have the same size**!

To find pieces of the same size, we can use **equivalent fractions.**
We have to find a **common denominator.**

Example:

$\frac{3}{9}+\frac{1}{3}=$

1) Can you find an equivalent fraction to $\frac{1}{3}$ with denominator 9?

2) Solve the operation with the new fraction.

3) Using one of the applets, represent both operations: do you get the same result?

Finding the common denominator

To find a common denominator, we can compute the **least common multiple** of the two denominators, and find equivalent fractions with that denominator.

Example:

$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} =$

1) What is the least common multiple of the denominators?

2) Can you find equivalent fractions with that denominator?

3) Add the new fractions.

4) Using one of the applets, represent both operations: do you get the same result?

Finding the common denominator

To find a common denominator, we can compute the **least common multiple** of the two denominators, and find equivalent fractions with that denominator.

Example:

$\frac{2}{3} + \frac{1}{5} =$

1) What is the least common multiple of the denominators?

2) Can you find equivalent fractions with that denominator?

3) Add the new fractions.

4) Using one of the applets, represent both operations: do you get the same result?

Activity 3: Solve the following operations

a) $\frac{1}{7} + \frac{2}{3} =$ b) $\frac{2}{6} + \frac{1}{4} =$

c) $\frac{3}{5} + \frac{1}{10} =$ d) $\frac{2}{8} - \frac{1}{4} =$

e) $\frac{3}{8} - \frac{1}{4} =$ f) $\frac{3}{2} - \frac{1}{7} =$

Use the applets to check your results.

Tip: If you don't have enough pieces, draw it in your notebook and your BigBlueButton blackboard.

Activity 4: Adding mixed numbers

How can we operate these mixed numbers?
Make some drawings and discuss it with your group.

1) $1\frac{2}{3} - \frac{1}{3} =$

2) $3\frac{2}{3} + 1\frac{3}{6} =$

3) $2\frac{5}{6} - 1\frac{1}{6} =$

Ingresa aquí tu respuesta...

Session 12

Autor: Diego Acedo

Activity 1: Analyzing world's population

Sometimes, numbers are so big that we need tools to compare them, somehow.
We can use fractions for that!

Find the information that you need, and answer the following questions:

1) If the world had 100 people, how many people would live in Asia? And in Europe? And in Spain?

2) What fraction of the world's **population** live in those places? What about both?
Can you approximate it using easier fractions?

3) How many people have access to **drinking water**? How many people don't?
What fraction of the world's population are those? Can you approximate it using simpler fractions?

4) Discuss with your group, and express your feelings about your solutions. Do they make sense? Are fractions useful for understanding these quantities?
(Podéis comentar y responder este apartado en castellano).

Tip: Use the gadgets in previous sessions to represent your fractions.

Tip: You can use expressions like the following:

"____ people live in Asia."

"____ of the world live in Asia."

Ingresa aquí tu respuesta...

Activity 2: A problem in my hotel.

In my hotel:

- $\frac{1}{4}$ of the people are german.
- $\frac{2}{5}$ of the people are french.
- $\frac{1}{6}$ of the people are american.
- $\frac{1}{3}$ of the people are japanese.

1) At least, how many people are staying in the hotel?

2) I have checked the numbers... and there has to be a mistake! Can you tell what it is?

Ingresa aquí tu respuesta...

Anexo IX: Unidad didáctica original

Diseño de Intervención

Fracciones en 1º de ESO.

Diego Acedo Moscoso

Universidad de Cádiz

Centro de Prácticas: IES Manuel de Falla.

Tutor de prácticas en centro: Antonio Baeza Salas

Supervisor del Prácticum: José María Cardeñoso Domingo.

Facultad de Ciencias de la Educación

Máster de Formación de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas

Puerto Real, 15 de junio de 2020

Índice

1. Introducción.

El presente documento presenta un diseño de intervención para la unidad didáctica "Fracciones y operaciones básicas", para la asignatura de Matemáticas en tres cursos de 1º de ESO del IES Manuel de Falla, en Puerto Real, dentro del programa bilingüe del centro. Se desarrolla un marco teórico sobre el que se apoya la unidad, así como los contenidos, competencias, objetivos propuestos, la metodología a seguir, las dificultades de aprendizaje y los métodos de evaluación asociados a ésta, junto a técnicas de atención a la diversidad y una descripción de las sesiones.

2. Marco Teórico.

Las fracciones son una de las primeras tomas de contacto del alumnado con los números racionales, junto a los decimales y los porcentajes. El aprendizaje de este tipo de números es fundamentalmente distinto del aprendizaje de los números enteros, pues se comportan de manera distinta a estos. Como dicen Vamakoussi y Vosniadou (2010), los niños comienzan construyendo los números como una herramienta de conteo, y dependen mucho de su concepción previa de número a la hora de dar sentido a los números racionales. Según Siegler (2011), no sólo su aprendizaje es distinto, sino que además la concepción de número natural hace de barrera conceptual para el aprendizaje de otro tipo de números. Algunas propiedades de los números naturales, como la existencia de un sucesor, hacen necesario modificar el esquema mental de número, pues los niños conciben y aprenden conceptos por características que no les son definitorias. Por ejemplo, un taxi debe ser amarillo o un tío una persona adulta.

Toda esta complejidad se suma al hecho de que las fracciones agrupan bajo el mismo término distintas interpretaciones. Behr et al. (2012) diferencian las siguientes:

- La fracción como todo relación parte-todo.
- La fracción como cociente indicado (reparto).
- La fracción como razón.
- La fracción como operador.

Además de esto, existen distintos contextos en los que se manifiestan las fracciones, tanto discretos como continuos, y ambos contextos son necesarios para una completa comprensión de las diferentes situaciones de partición y reparto (Sanz, 2018).

Todo esto, sumado al hecho de que algunos de los procesos que se usan para trabajar con números racionales (como la reducción a común denominador mediante el máximo común divisor, o la comparación de fracciones expresadas de forma simbólica) resultan artificiales si no se entienden las bases en que se apoyan, da lugar a que una gran parte del alumnado memorice muchas técnicas y procesos, sin dar un sentido a lo que está haciendo. Como dice Sanz (2018), se ha demostrado que errores comunes cometidos por estudiantes al operar con fracciones se deben a una aplicación incorrecta de reglas memorizadas pero evocadas sin precisión. Mack (1990) refuerza también esta idea, y añade que esto da lugar a que la competencia en el uso de fracciones disminuya con el tiempo. En su investigación, observa que los procedimientos memorizados llegan a crear conflicto con algunos procedimientos intuitivos de sus alumnos.

Una manera de solucionar esto es lograr que el alumnado construya una idea intuitiva del concepto de fracción, así como técnicas propias que le permitan comprobar si sus soluciones tienen o no sentido en el contexto en que se presentan. Según Mack (1990), los estudiantes relacionan los símbolos de las fracciones y los procedimientos con su conocimiento informal en formas que son significativas para ellos. Es por ello que, siguiendo las ideas de este mismo artículo, trabajaremos relacionando continuamente lo que hacemos en clase con situaciones de la vida diaria del alumnado, alternando entre el contexto real y simbólico a menudo, a fin de que comprueben la relación entre ambos. Para trabajar con las fracciones de esta manera, el mismo autor recomienda utilizar inicialmente materiales que mantengan una idea concreta de las fracciones que se están tratando, y una vez que esta idea se vaya interiorizando, comenzar a trasladarse al terreno simbólico, o plantear situaciones que no puedan resolverse utilizando estos materiales concretos, y que permitan abstraer y generalizar ciertas ideas. Se da también aquí una gran importancia a la estimación de fracciones, y la comparación de fracciones similares a la unidad, como $\frac{9}{8}$.

No obstante, aunque el conocimiento informal ayude a dar sentido y contexto al contenido, es necesario que el concepto de fracción se desarrolle también en su vertiente abstracta, de modo que pueda generalizarse a distintas situaciones, y el alumnado consiga relacionar unas situaciones problemáticas con otras, así como encontrar patrones en sus procedimientos de resolución de problemas. De nuevo, Mack (1990) observa que el alumnado es capaz de resolver problemas planteados en situaciones reales, pero no sabe como resolver la misma situación planteada de manera simbólica.

Para lograr que se adquiera este conocimiento abstracto partimos del modelo de Nicolaou y Pita-Pattanzi (2015), quienes confirman un modelo teórico formado por siete habilidades clave que conforman el entendimiento de las fracciones en estudiantes de entre 11 y 13 años, y realizan un diseño de intervención para potenciar dichas habilidad. Éstas son:

- Reconocimiento de fracciones: La habilidad de reconocer características estructurales de las fracciones, detectar puntos comunes y diferencias entre ellas, así como clasificarlas.
- Definiciones y explicaciones matemáticas de las fracciones: La habilidad de definir con sus propias palabras qué es una fracción, y explicarlo de distintas formas (con dibujos, verbalmente, etc.)
- Argumentaciones y justificaciones sobre fracciones: La habilidad de juzgar enunciados sobre fracciones como verdaderos o falsos, justificando su elección.
- Magnitud relativa de las fracciones: La capacidad de comparar y ordenar fracciones. Esta se considera crucial, ya que si el alumnado no puede comparar fracciones, es muy probable que no haya entendido su significado.
- Representación de fracciones: La habilidad de traducir lo visual, lo verbal y lo simbólico, así como de construir dibujos que representen fracciones.
- Conexión y traducción de fracciones con decimales, porcentajes y la división.
- Reflexión sobre la solución de problemas con fracciones: Habilidad de argumentar su razonamiento y respuesta apoyar la "razonabilidad" de su respuesta y verificar una respuesta dada.

A lo largo de la unidad se intentarán trabajar todas estas habilidades de distintas formas. La enseñanza tradicional, por el contrario, enfatiza sobre todo la magnitud relativa de fracciones, su representación y relación con decimales y porcentajes, dejando a un lado el resto de habilidades. Cabe destacar que podría incluirse, entre las anteriores, la habilidad de cálculo con fracciones, pero esto es causa de debate entre diversos autores. Algunos, como Sanz (2018) la incluyen, mientras que otros, como Siegler (2011) la suponen como una consecuencia de otras habilidades.

Esta unidad didáctica es un punto básico dentro del pensamiento matemático del alumnado. Como ya hemos mencionado, a través del pensamiento informal utilizamos las fracciones en nuestra vida cotidiana casi intuitivamente, sin pensar en los procesos subyacentes que tienen lugar en nuestra mente. Es por ello que uno de los objetivos de este aprendizaje será que el alumnado aprenda a conocer estos procesos y adquirir un lenguaje que le permita expresarlos y profundizar en ellos. Pero además de esto, el aprendizaje de las fracciones es un punto de partida para la construcción de otros tipos de pensamiento matemático. Uno de los más importantes será el pensamiento algebraico, ya que los procesos de resolución de problemas con fracciones se basan a menudo en las propiedades fundamentales de las operaciones y la igualdad, que forman parte del álgebra. En su artículo, Yeon Lee et al. (2014) comprueban que ambos pensamientos están relacionados bajo una serie de operaciones que son críticas para el aprendizaje de las fracciones. Estas operaciones son:

- Particionar, dividir y desarmar: Es decir, dividir en trozos iguales y tomar piezas sin que por ello se pierda el concepto de la unidad de la que partíamos.
- El esquema iterativo de fracción: La capacidad de dividir en trozos iguales e iterar un cierto número de veces una de ellas para obtener otra cantidad.
- El tercer concepto multiplicativo: Consiste en distinguir un mismo proceso u objeto de distintas formas. Como ejemplo de esto, un alumno con esta habilidad podría reconocer que $3 \cdot 5 \cdot 28 = 3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 7 = 3 \cdot 5 \cdot (30 - 2)$, y estimar cuál de estas opciones es más sencilla de realizar a la hora de operar mentalmente. Se trata de una habilidad compleja de desarrollar, pero se comprueba su potencia a la hora de operar con fracciones para, por ejemplo buscar fracciones equivalentes a otras dadas, o comprobar que $\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$.

Las autoras también destacan la importancia de las representaciones visuales y el uso de preguntas que permitan desarrollar las ideas o encontrar errores en los argumentos.

3. Contexto.

3.1 Características del centro.

El IES Manuel de Falla se sitúa a las afueras de Puerto Real, a menos de un kilómetro del Campus universitario de la Universidad de Cádiz. El centro cuenta con una gran oferta de estudios: ESO, Bachillerato (tanto salud y tecnología como ciencias sociales y humanidades), una FP Básica de Informática y Comunicaciones, un grado medio de FP en Gestión Administrativa, y un grado superior en Administración y Finanzas. Además de esto, el centro ofrece enseñanza para adultos en modalidad semipresencial durante la tarde, tanto a nivel de ESPA como Bachillerato. Esto hace que el alumnado sea muy diverso en cuanto a orígenes e intereses. En general, el alumnado es de un nivel socioeconómico medio o bajo. Gran parte de las familias trabajan en el sector industrial, y muchas de éstas en los astilleros situados a las afueras de la localidad.

Sobre las instalaciones, el centro cuenta con un edificio principal formado por tres pisos, y organizado en dos alas situadas en torno a un pasillo central, donde dan clase la mayoría de los cursos de ESO. Además de esto, cuenta con un SUM (sala de usos múltiples), dos pistas (de fútbol y baloncesto), aulas de música, dibujo, tecnología, y laboratorios. También existen un aula de Pedagogía Terapéutica y un Aula de Convivencia. Todas las aulas cuentan con una pizarra tradicional y una pizarra digital, normalmente conectada a un ordenador.

El centro posee una vida activa gracias al compromiso del profesorado y el equipo directivo. Se realizan salidas frecuentemente, y el centro participa de diversos planes y programas, como el programa *ALDEA* o *Escuela Espacio de Paz*. Uno de los más activos es el programa bilingüe, obligatorio para todo el alumnado de la ESO y que se lleva a cabo también con un gran compromiso por parte de las familias.

3.2. Características del alumnado.

La unidad didáctica está diseñada para su realización en tres grupos de 1º de ESO, A, B y C, todos parte del programa bilingüe del centro, formados de manera heterogénea en cuanto a género y ritmos de aprendizaje, y con un ratio muy bajo. El bajo ratio se debe a la detección de alumnado con dificultades de aprendizaje mediante el Programa de Tránsito del centro. Estos grupos se unen en otras asignaturas (junto a otro grupo, D), dando lugar a ratios más altos (sobre 30), pero se mantienen pequeños en esta asignatura.

Grupo	Nº total de alumnos	Alumnas	Alumnos	NEAE	ACIs
A	13	4	9	0	0
B	17	7	10	0	0
C	16	7	9	0	0

Tabla 1: Características del alumnado en cada curso.

El único alumno con NEAE posee disortografía. Tras conversar con la profesora de Pedagogía Terapéutica del centro, ésta me dijo que era leve, pero que era recomendable el uso de imágenes o herramientas que no involucraran demasiado el texto escrito.

El alumnado no siente una gran motivación por el contenido de la asignatura: ésta se percibe como algo obligatorio, pero no práctico. Sin embargo, y paradójicamente, sí prestan mucha atención al contenido divulgativo que se presenta en clase, ya sea de tipo histórico, más avanzado matemáticamente, o más "filosófico". El grado de cohesión del grupo clase no es muy alto, pero sí existen subgrupos más pequeños dentro de cada grupo, normalmente del mismo género, y tampoco hay alumnos que puedan sentirse excluidos del grupo clase. No existen alumnos absentistas ni con Adaptaciones Curriculares.

4. Principios pedagógicos.

En base a las características del alumnado y al contexto del centro, nuestra unidad didáctica se sostendrá sobre los siguientes principios pedagógicos:

- El uso de la matemática manipulativa como herramienta lúdica y que ayude a entender los conceptos intuitivamente, así como a elaborar técnicas que hagan de algunas ideas abstractas algo más tangible y concreto.
- El aprendizaje por descubrimiento: se promoverá que sea el alumnado el que se haga preguntas y busque técnicas que le permitan resolver los problemas que se le plantean. Tras este razonamiento, también se proporcionarán técnicas o esquemas que sean útiles para resolver dichos problemas de manera general.
- La presentación de la matemática como una herramienta útil en la vida diaria, relacionando el lenguaje algebraico en que resultan las fracciones con casos reales que puedan encontrar en su vida diaria. Para ello, habrá un constante movimiento entre lo algebraico (abstracto) y lo concreto, con datos similares, que muestren la relación entre ambas.
- La potenciación de la capacidad de generalización y abstracción de un concepto o método, mediante la realización de actividades que no puedan resolver utilizando los materiales que tienen (por ejemplo, con fracciones de números muy grandes, o negativas).
- La mejora de la capacidad expositiva, tanto en castellano como en inglés, mediante la presentación y explicación de procesos seguidos y resultados obtenidos.
- La repetición de problemas similares con variaciones en los datos, que ayuden a crear patrones comunes y ayuden a interiorizar el proceso mental que se está siguiendo.
- El desarrollo del pensamiento crítico y comprobación de los resultados que se obtienen.

5. Objetivos.

Detallamos aquí los objetivos que se persiguen en esta unidad didáctica, a tres niveles: los objetivos de la etapa ESO, los objetivos de la materia de Matemáticas en 1º y 2º de ESO, y los objetivos específicos de la unidad didáctica que se imparte, según la legislación vigente y lo establecido en la programación del departamento de matemáticas del centro.

5.1. Objetivos de la etapa.

Según lo establecido en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, la Educación Secundaria Obligatoria contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan:

a) Asumir responsablemente sus deberes, conocer y ejercer sus derechos en el respeto a los demás, practicar la tolerancia, la cooperación y la solidaridad entre las personas y grupos, ejercitarse en el diálogo afianzando los derechos humanos y la igualdad de trato y de oportunidades entre mujeres y hombres, como valores comunes de una sociedad plural y prepararse para el ejercicio de la ciudadanía democrática.

b) Desarrollar y consolidar hábitos de disciplina, estudio y trabajo individual y en equipo como condición necesaria para una realización eficaz de las tareas del aprendizaje y como medio de desarrollo personal.

c) Valorar y respetar la diferencia de sexos y la igualdad de derechos y oportunidades entre ellos. Rechazar la discriminación de las personas por razón de sexo o por cualquier otra condición o circunstancia personal o social. Rechazar los estereotipos que supongan discriminación entre hombres y mujeres, así como cualquier manifestación de violencia contra la mujer.

d) Fortalecer sus capacidades afectivas en todos los ámbitos de la personalidad y en sus relaciones con los demás, así como rechazar la violencia, los prejuicios de cualquier tipo, los comportamientos sexistas y resolver pacíficamente los conflictos.

e) Desarrollar destrezas básicas en la utilización de las fuentes de información para, con sentido crítico, adquirir nuevos conocimientos. Adquirir una preparación básica en el campo de las tecnologías, especialmente las de la información y la comunicación.

f) Concebir el conocimiento científico como un saber integrado, que se estructura en distintas disciplinas, así como conocer y aplicar los métodos para identificar los problemas en los diversos campos del conocimiento y de la experiencia.

g) Desarrollar el espíritu emprendedor y la confianza en sí mismo, la participación, el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar, tomar decisiones y asumir responsabilidades.

h) Comprender y expresar con corrección, oralmente y por escrito, en la lengua castellana y, si la hubiere, en la lengua cooficial de la Comunidad Autónoma, textos y mensajes complejos, e iniciarse en el conocimiento, la lectura y el estudio de la literatura.

i) Comprender y expresarse en una o más lenguas extranjeras de manera apropiada.

j) Conocer, valorar y respetar los aspectos básicos de la cultura y la historia propias y de los demás, así como el patrimonio artístico y cultural.

k) Conocer y aceptar el funcionamiento del propio cuerpo y el de los otros, respetar las diferencias, afianzar los hábitos de cuidado y salud corporales e incorporar la educación física y la práctica del deporte para favorecer el desarrollo personal y social. Conocer y valorar la dimensión humana de la sexualidad en toda su diversidad. Valorar críticamente los hábitos sociales relacionados con la salud, el consumo, el cuidado de los seres vivos y el medio ambiente, contribuyendo a su conservación y mejora.

l) Apreciar la creación artística y comprender el lenguaje de las distintas manifestaciones artísticas, utilizando diversos medios de expresión y representación.

5.2. Objetivos de la materia.

Según lo establecido en la programación del departamento, y en línea con los objetivos generales del Bloque 1 de Procesos, métodos y actitudes en matemáticas, según la Orden de 14 de julio de 2016, la asignatura de matemáticas de 1º de ESO de matemáticas debe contribuir a que el alumnado obtenga las siguientes habilidades.

CE. 1.1. Expresar verbalmente, de forma razonada, el proceso seguido para resolver un problema.

CE. 1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.

CE. 1.3. Describir y analizar situaciones de cambio, para encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas, en contextos numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos y probabilísticos, valorando su utilidad para hacer predicciones.

CE. 1.4. Profundizar en problemas resueltos planteando pequeñas variaciones en los datos, otras preguntas, otros contextos, etc.

CE. 1.5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.

CE. 1.6. Desarrollar procesos de matematización en contextos de la realidad cotidiana (numéricos, geométricos, funcionales, estadísticos o probabilísticos) a partir de la identificación de problemas en situaciones problemáticas de la realidad.

CE. 1.7. Valorar la modelización matemática como un recurso para resolver problemas de la realidad cotidiana, evaluando la eficacia y limitaciones de los modelos utilizados o construidos.

CE. 1.8. Desarrollar y cultivar las actitudes personales inherentes al quehacer matemático.

CE. 1.9. Superar bloqueos e inseguridades ante la resolución de situaciones desconocidas.

CE. 1.10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.

5.3. Objetivos específicos de la unidad didáctica.

Por último, los criterios de evaluación específicos de esta unidad didáctica, según aparecen en la Orden de 14 de julio de 2016 son los siguientes:

1. Utilizar números naturales, enteros, fraccionarios y decimales, sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria.
2. Desarrollar, en casos sencillos, la competencia en el uso de operaciones combinadas como síntesis de la secuencia de operaciones aritméticas, aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones o estrategias de cálculo mental
3. Elegir la forma de cálculo apropiada (mental, escrita o con calculadora), usando diferentes estrategias que permitan simplificar las operaciones con números enteros, fracciones, decimales y porcentajes y estimando la coherencia y precisión de los resultados obtenidos.

Añadimos a éstos otros objetivos, que permitan lograr los anteriores según lo comprobado en el marco teórico, y que contemplen la participación de la asignatura en el programa bilingüe del centro.

O.1 Comprender el significado de las fracciones como razón, proporción, cociente indicado y reparto.

O.2 Desarrollar el concepto de número racional, en comparación al de número entero, e identificar similitudes y diferencias entre ellos.

O.4 Generar un pensamiento reflexivo y crítico respecto a los datos que se tratan y las soluciones propuestas.

O.5 Identificar e interpretar fracciones en medios de comunicación, internet u otras fuentes de información.

O.6 Estimar fracciones complejas mediante otras más simples, y comprobar el error que se comete mediante la aproximación.

O.7 Desarrollar estrategias y herramientas de distinta índole que permitan comparar fracciones.

O.8 Aprender a identificar fracciones equivalentes y elaborar técnicas para construirlas.

O.9 Encontrar técnicas de simplificación de fracciones, y comprender la utilidad de éstas como caso particular de la construcción de fracciones equivalentes.

O.10 Comprender el significado de las operaciones básicas de suma y resta de fracciones, así como sus aplicaciones, como extensión de las mismas operaciones en números enteros.

O.11 Desarrollar algoritmos que permitan estimar y calcular los resultados de las diferentes operaciones con fracciones.

O.12 Utilizar un segundo idioma para comunicarse correctamente sobre fracciones.

O.13 Utilizar herramientas informáticas tecnológicas para realizar cálculos, manipular fracciones y obtener información.

6. Competencias.

6.1. Competencias clave.

Durante la unidad se trabajarán todas las competencias clave propuestas por la Unión Europea, y recogidas en la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero. Esto se hará de la siguiente forma:

Competencia en comunicación lingüística (CCL): Esta competencia se desarrollará mediante la exposición verbal de soluciones y resultados en la pizarra, la expresión adecuada tanto en castellano como inglés, y el correcto uso del lenguaje matemático a la hora de expresar ideas.

Competencia matemática y en ciencias y tecnología (CMCT): Como parte fundamental de la asignatura, esta competencia se potenciará mediante el pensamiento numérico y lógico, y la resolución de problemas.

Competencia digital (CD): Se desarrollará mediante el uso de calculadoras para traducir entre decimales y fracciones. Se utilizarán también en clase applets de GeoGebra que estarán disponibles en la plataforma virtual para el alumnado, y que podrán utilizar como herramienta de apoyo.

Competencias sociales y cívicas (CSC): El uso de las fracciones como herramienta cuantitativa resultará útil para ejemplificar e interpretar información sobre diversos contexto sociales, que se propondrán como ejemplos o problemas.

Competencia Aprender a aprender (CAA): Se desarrollará mediante la elaboración de estrategias de resolución de problemas, así como la búsqueda de información, y de técnicas que permitan comparar y operar las fracciones.

Sentido de la iniciativa y espíritu emprendedor (SEIP): Se propondrán problemas y situaciones en las que el uso de las fracciones permita obtener información sobre cómo gestionar un determinado proyecto, y se potenciará que el alumnado busque caminos alternativos de resolución de problemas, aumentando su autonomía y tolerancia al error

Conciencia y expresiones culturales (CEC): Se utilizarán las fracciones para comparar diversas culturas de manera cuantitativa, y se utilizará la cultura andaluza para exponer ejemplos de usos de fracciones.

	CCL	CMCT	CD	CAA	CSC	SEIP	CEC
Sesión 1	X	X		X			X
Sesión 2	X	X			X	X	X
Sesión 3	X	X	X	X			
Sesión 4	X	X	X	X			
Sesión 5	X	X		X		X	X
Sesión 6	X	X			X	X	X
Sesión 7	X	X		X		X	X
Sesión 8	X	X		X	X		
Sesión 9	X	X		X			
Sesión 10	X	X	X	X			
Sesión 11	X	X		X	X	X	X

Tabla 2: Competencias clave desarrolladas en cada sesión.

6.2. Competencias de Niss.

Además de las competencias anteriores, se desarrollarán las competencias propuestas por Niss (2003) con el objetivo de lograr una correcta alfabetización matemática. Prácticamente todas las competencias se desarrollan en todas las sesiones. Estas competencias son las siguientes:

Pensar matemáticamente (PM): Fomentando que el alumnado se haga preguntas y busque las respuestas entre las matemáticas que conoce, y mediante la generalización de procesos ya conocidos para aplicarlos a nuevos objetos.

Proponer y resolver problemas matemáticos (PRPM): Trabajaremos esta competencia promoviendo que el alumnado proponga al resto de la clase sus propios problemas con unos datos determinados.

Modelar matemáticamente (MM): Utilizaremos los problemas y la interpretación de fracciones como operador para modelar diferentes situaciones matemáticamente, y evaluar la potencia de dichos modelos.

Razonar matemáticamente (RM): Se pondrá énfasis en el rigor matemático a la hora de argumentar y expresarse, y se buscarán estrategias para realizar nuevos procesos complejos, como la simplificación de fracciones o la reducción a común denominador.

Representar entidades matemáticas (REM): Se trabajará mediante la traducción entre las distintas formas de las fracciones, tanto numéricamente (paso a decimal) como visualmente (representación en modelos continuos y discretos). También, se motivará al alumnado para que se cuestione qué modelo resulta más eficiente en un determinado contexto.

Utilizar correctamente símbolos matemáticos y formalismos (SMF): Uno de los objetivos principales de la unidad es que el alumnado aprenda a utilizar la simbología de las fracciones para expresarse, sin la necesidad de recurrir a medios concretos.

Comunicarse en, con y sobre matemáticas (CM): Como se ha mencionado, se pondrá énfasis en que la expresión sea matemáticamente rigurosa, y esto se comprobará cuando el alumnado salga a menudo a la pizarra o participe en la clase. A esto se suma el uso del inglés como otro método de expresión.

Utilizar ayudas y herramientas (UH): Utilizaremos un juego de tarjetas a lo largo de la unidad que permitirá al alumnado comprobar sus soluciones y servirá como ayuda principal al cálculo meramente simbólico. Además, al igual que para la competencia digital, se utilizarán applets de GeoGebra y calculadoras.

7. Contenidos.

7.1. Contenidos según la legislación.

Esta unidad forma parte del Bloque 2: Números y Álgebra, según lo establecido en el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la

Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. Recogemos en la siguiente tabla los puntos de este documento referentes de este documento referentes a esta unidad didáctica:

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje
Fracciones en entornos cotidianos. Fracciones equivalentes. Comparación de fracciones. Representación, ordenación y operaciones. Relación entre fracciones y decimales. Conversión y operaciones. Jerarquía de las operaciones.	1. Utilizar números naturales, enteros, fraccionarios, decimales y porcentajes sencillos, sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria. 3. Desarrollar, en casos sencillos, la competencia en el uso de operaciones combinadas como síntesis de la secuencia de operaciones aritméticas, aplicando correctamente la jerarquía de las operaciones o estrategias de cálculo mental 4. Elegir la forma de cálculo apropiada (mental, escrita o con calculadora), usando diferentes estrategias que permitan simplificar las operaciones con números enteros, fracciones, decimales y porcentajes y estimando la coherencia y precisión de los resultados obtenidos.	2.7. Realiza operaciones de conversión entre números decimales y fraccionarios, halla fracciones equivalentes y simplifica fracciones, para aplicarlo en la resolución de problemas. 3.1. Realiza operaciones combinadas entre números enteros, decimales y fraccionarios, con eficacia, bien mediante el cálculo mental, algoritmos de lápiz y papel, calculadora o medios tecnológicos utilizando la notación más adecuada y respetando la jerarquía de las operaciones. 4.1 Desarrolla estrategias de cálculo mental para realizar cálculos exactos o aproximados valorando la precisión exigida en la operación o en el problema. 4.2. Realiza cálculos con números naturales, enteros, fraccionarios y decimales decidiendo la forma más adecuada (mental, escrita o con calculadora), coherente y precisa.

Tabla 3: Contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje de la unidad didáctica.

Aunque estos contenidos serán nuestra guía, y evaluaremos al alumnado siguiendo estos estándares, añadimos a continuación, más en profundidad, otros contenidos que permitan lograr la adquisición total de los arriba mencionados.

7.2. Contenidos previos.

Para esta unidad didáctica es necesario cierto conocimiento sobre:

- Números decimales.
- La división entera y decimal.
- Los números negativos.
- La jerarquía de operaciones con números enteros.

Todo este contenido se ha impartido previamente, principalmente a lo largo del mismo curso escolar, aunque también durante los últimos cursos de la escuela primaria.

7.3. Conceptuales.

- La fracción como parte de la unidad.
- Fracciones propias e impropias.
- La fracción como cociente indicado.
- La fracción como operador: la fracción de un número.
- Vocabulario en inglés sobre las fracciones.
- Concepto de fracción equivalente.

7.4. Procedimentales.

- Comparación de fracciones con la unidad.
- Transformación de una fracción en un número decimal.
- Transformación de un decimal en fracción (únicamente en casos sencillos).
- Comparación de fracciones, previo paso a forma decimal.
- Producción de fracciones equivalentes, y transformación de un entero en fracción.
- Simplificación de fracciones.
- Comparación y ordenación de fracciones.
- Reducción a común denominador.
- Suma y resta de fracciones del mismo denominador.
- Suma y resta de fracciones con distinto denominador.
- Resolución de expresiones con sumas y restas de enteros y fracciones.

7.5. Actitudinales.

- Trabajo cooperativo en grupos reducidos.
- Rigor matemático tanto en la simbología como en el lenguaje.
- Desarrollo del pensamiento crítico con las soluciones propias, dotando de sentido los caminos seguidos y comprobando las soluciones de distintas formas.
- Fomento de la curiosidad matemática, tanto por su belleza como su utilidad.

8. Dificultades de aprendizaje.

Como hemos destacado en el marco teórico, la mayor parte de las dificultades se siguen de que, para desarrollar la idea de fracción, primero debe extenderse la idea de número más allá del esquema de los números enteros. Este cambio de esquema provoca las siguientes dificultades:

- Dos fracciones pueden representar el mismo número (fracciones equivalentes), mientras que esto no sucede con los números enteros y decimales. Esto es también especialmente relevante a la hora de comprender que los números enteros también son fracciones con denominador 1.
- El alumnado que no ha desarrollado la idea intuitiva de fracción tiende a operarlas como si se tratara de pares de números enteros, con errores como el siguiente:
$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{2}{4}.$$
- En problemas en los que la fracción aparece como un operador, o a la hora de trabajar con fracciones impropias, determinar la unidad con la que se trabaja puede ser complicado.
- Las técnicas más eficientes en matemáticas para realizar algunos procesos (por ejemplo, la reducción a común denominador, o la obtención de fracciones irreducibles) son poco intuitivas y muchas veces se perciben como un proceso mecánico que realizar en dicha situación, que se olvida a lo largo del tiempo.

Para resolver estos problemas nos centraremos en que el alumnado desarrolle de manera informal la idea de fracción, mediante el uso de las tarjetas, y consiga relacionar estas ideas con la simbología matemática que la representa. Estas tarjetas muestran bien por qué dos fracciones pueden ser equivalentes con distintos símbolos, al dar un sentido tanto al denominador como al numerador. Además de esto, fomentaremos que sean los propios alumnos quienes, utilizando las tarjetas, desarrollen técnicas que sean intuitivas para ellos mismos, así como que aprendan a traducir dichas técnicas al lenguaje algebraico. Las dificultades a la hora de operar fracciones resultan en muchos casos de no haber dado sentido a la simbología, de modo que una buena comprensión del significado de las fracciones reducirá enormemente el número de casos en que estos errores se lleven a cabo.

9. Atención a la diversidad.

Dadas las características del grupo, debemos hacer hincapié en dos aspectos de la atención a la diversidad:

Por un lado, existe un alumno con disortografía leve. Siguiendo las ideas recogidas en (Rabadán J. et al., 2014), utilizaremos material manipulativo para evitar en la medida de lo posible el uso de textos escritos. Además de esto, se potenciará el uso del lenguaje oral. Por último, el cuadernillo en el que se incluyen todas las actividades a realizar se entregará a este alumno, y cualquier otro que pudiera necesitarlo, en formato A4, cuando está diseñado para su realización en A5, de modo que las letras y tablas serán más grandes.

Por otro lado, existen varios alumnos con dificultades de aprendizaje. Debido a ello, se pondrá mucho énfasis en la repetición y muestra de distintas técnicas que puedan resultar útiles para resolver un problema, así como trabajos cooperativos con grupos heterogéneos, en los que se prima que todos comprendan las decisiones que se están tomando. Esto hace que sea el mismo grupo, por interés general, el que promueva el aprendizaje común, y logre que, con intervenciones puntuales del docente, todos los miembros aprendan lo que se está haciendo.

10. Recursos.

Se hará uso de los siguientes recursos:

- **Pizarra tradicional:** como herramienta para exponer ideas, resolver actividades y problemas, y hacer distintas representaciones, tanto por parte del docente como del alumnado.
- **Pizarra digital y ordenador del aula:** Se utilizará principalmente para mostrar imágenes y applets de GeoGebra que sirvan como herramienta manipulativa auxiliar, así como para buscar información. Los applets de GeoGebra están disponibles de forma pública y pueden consultarse en el siguiente enlace. Están en inglés, utilizan distintos modelos de representación y permiten manipular los objetos de distintas maneras.
- **Juego de tarjetas de fracciones:** Juego incluido en el Anexo II, entregado al alumnado en papel o cartulina de colores, para la realización de gran parte de las actividades planteadas durante la unidad.

- **Cuadernillo de actividades de fracciones:** Cuadernillo entregado al alumnado en formato A5 que contiene las actividades a realizar durante la unidad, incluido en el Anexo VII.
- **Tarjetas de la actividad intermedia evaluable**: Estas tarjetas están obtenidas como recurso del Math Shell Center, y son públicas bajo licencia CreativeCommons. Pueden consultarse en el siguiente enlace. Han sido también incluidas en este documento, en el Anexo III.
- **Libro de texto de Anaya:** como ayuda teórica complementaria y apoyo al resto del material.

11. Diseño y temporalización de las sesiones.

Sesión 1: Cuestionario inicial

La clase comienza con una nueva presentación, estableciendo cuál será el sistema de evaluación, cómo vamos a trabajar y cuáles son los objetivos que queremos cumplir al final de la unidad.

A fin de conocer el nivel previo del alumnado, la primera clase consistiría en la realización de un pequeño cuestionario inicial basado en las ideas previas necesarias para afrontar la unidad, junto a algunas de las cuestiones que forman parte de ésta, y otras que pueden realizarse de manera tanto de manera intuitiva como con un razonamiento matemático, a fin de comprobar cómo piensa cada alumno. Se deja la primera mitad de la clase para resolver este cuestionario, incidiendo en que se expongan con palabras los argumentos utilizados. Al finalizar, cada alumno entrega su prueba al alumno contiguo.

Durante la segunda mitad de la clase, el cuestionario se comenta en clase, y cada alumno realiza una pequeña autoevaluación: se comienza pidiendo las impresiones del alumnado, y cómo se han sentido al hacer la prueba, para tener una impresión inicial del nivel medio de la clase. Tras esto, los ejercicios más intuitivos se resuelven en clase utilizando argumentos lógicos o cotidianos, mientras el docente relaciona dichos argumentos con la matemática a la que corresponden. Esto no tiene como objetivo enseñar de primeras al alumnado todo lo que se va a hacer, sino introducir las distintas ideas de fracciones y mostrarles que existe una relación entre la manera en que ellos razonan y todo lo que van a hacer y aprender durante la unidad. Mientras se comentan los ejercicios, cada alumno realiza una pequeña autoevaluación de su trabajo, sin ponerse nota, únicamente corrigiendo los errores que pueda haber. Los ejercicios más algebraicos (6 y 7) van dirigidos principalmente a detectar posibles ideas equivocadas sobre las fracciones, en caso de haberlas visto en años anteriores. La mitad de los ejercicios están escritos en inglés, para comprobar el nivel del alumnado en este aspecto y si esto repercute gravemente en la comprensión de los conceptos que se llevan a cabo.

Sesión 2: Clase introductoria al material.

La segunda sesión comienza con una pequeña explicación por parte del docente sobre qué son las fracciones. Como forma de introducirlas, y dado que el alumnado ya ha visto superficialmente este concepto en cursos previos, la clase se intenta hacer en inglés, introduciendo los conceptos junto al vocabulario y relacionándolo con los conceptos en castellano.

Junto a esta definición, proponemos distintos casos reales en que aparezcan, de entre los propuestos en la prueba inicial, tanto por el docente como por el alumnado, y las acompañamos de sus representaciones gráficas en modelos continuos y discretos. Durante toda la unidad se utilizarán modelos continuos basados en rectángulos, ya que resultan más útiles a la hora de trabajar con la suma y la resta que los propuestos como diagramas de tarta, por ejemplo. Tras esto, se explicará el vocabulario correspondiente a las fracciones en inglés: cómo se nombran y cuáles son sus partes: numerador, denominador, fracciones propias e impropias y cómo se nombran.

Se dará a cada alumno un juego de tarjetas de colores con fracciones correspondientes, junto a una funda de plástico donde guardarlos, que deberán recortar y traer el próximo día. Se explicará el juego de tarjetas incluido en el Anexo II. Este juego está conformado por piezas rectangulares de distintos colores y tamaños, que corresponden a distintas fracciones de una unidad fija, y que por lo tanto permiten trabajar de manera intuitiva. Lo primero será identificar a qué fracción corresponde cada pieza. La pieza más grande de cada color es siempre la unidad. Tras ésta, hay una pieza grande, otra pieza media y otra más pequeña (big - medium - small). Comenzaremos trabajando con las piezas rojas y verdes, que corresponden, respectivamente a las fracciones 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, y 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{6}$, 1/9. Con esto, se pregunta a la clase:

1. How many green small pieces do you need to form a whole unit? What fraction do they represent?
2. How many red small pieces do you need to form an unit? What fraction does it represent? Mediante esto, se pedirá realizar la Actividad 1.1 del cuadernillo, consistente en rellenar una tabla con los nombres y símbolos de las fracciones a las que corresponde cada pieza. Se harán los apartados correspondientes a la cartulina roja, y se dejará el

resto como tarea. También se pedirá que escriban la correspondiente fracción sobre cada pieza.

Finalmente, para terminar de trabajar estas ideas, y relajar un poco al alumnado, se realizará un pequeño juego en clase: dado el bajo ratio, se les pondrá de pie y en fila. Entonces, el profesor pondrá en la pizarra virtual una imagen que corresponda a una fracción, y dirá en voz alta el nombre en inglés de la fracción. Si lo dicho por el profesor se corresponde con lo que hay en la pizarra, los alumnos deberán saltar a la derecha. Si no lo es, deberán saltar a la izquierda. Finalmente, se enviará a casa la actividad 1.2 del cuadernillo, que trata de escribir el símbolo correspondiente a cada fracción, dada por su nombre.

Sesión 3: Relación entre las piezas del juego. Fracciones propias e impropias.

En primer lugar, se procederá a comprobar si los alumnos han realizado lo pedido en la tarea anterior, y por lo tanto se repasará la tabla completa pidiendo la información al alumnado, de modo que quien no lo haya resuelto pueda completar la tabla para futuras clases. Una vez hecho esto, se continuará profundizando en el juego de tarjetas proponiendo la Actividad 1.4 del cuadernillo. Dicha actividad consiste en unir tarjetas para determinar distintas fracciones. Mientras se hace este ejercicio, se relaciona el proceso con el significado de las fracciones: incidimos en que corresponden a partes de una unidad mayor y fija, y proponemos ejemplos reales en los que se den este tipo de situaciones, como pueden ser repartos de tabletas de chocolate, relaciones con sistemas de medida (metros, kilos…).

Una vez hecho esto, referido únicamente a fracciones propias, proponemos el ejercicio 1.5, con fracciones impropias: la utilidad de este ejercicio consiste en generalizar la idea de las tarjetas a casos para los que no tenemos suficientes tarjetas. Se les pedirá que hagan dibujos que representen dichas situaciones, y se pedirá que el próxima día traigan resueltos los apartados restantes de ambos ejercicios.

Finalmente, y para incidir en que una fracción no es más que un número, mostramos cómo se pasa de fracción a decimal, utilizando tanto la calculadora como el algoritmo de la división, y acompañamos esta explicación de un gadget de GeoGebra que coloca simultáneamente representaciones gráficas y simbólicas de las fracciones, junto a los decimales y su posición sobre la recta real. Sobre esto, pedimos al alumnado que realice la Actividad 1.6 con su calculadora. Dicha actividad consiste únicamente en pasar de fracción a decimal y representar sobre la recta real.

Sesión 4: Comparación intuitiva de fracciones y paso a decimal.

Tras comprobar y corregir la tarea del día anterior se comenzará a trabajar la comparación de fracciones de manera intuitiva. Para ello, se pedirá en clase la realización de la Actividad 2.1 del cuadernillo, y se dejará el resto como tarea. Dicha actividad consiste en elegir dos fracciones en forma de tarjetas, y compararlas utilizando este método. Además, para ejemplificar estas ideas, el profesor propone una situación real de reparto de chocolate, para que el alumnado relacione de nuevo el juego de tarjetas con situaciones reales en que puedan serle útiles. Mediante esto, se incidirá además que para poder comparar dos fracciones las piezas deben tener el mismo tamaño, y en cómo afectan los numeradores y denominadores. Se intentará que el alumnado acabe preguntándose cómo comparar fracciones sin utilizar tarjetas, proponiendo casos para los que las tarjetas no sean suficientes. Tras una pequeña puesta en común, se explicará que una opción es pasar ambas fracciones a decimal, reforzando así la idea de que son distintas representaciones del mismo número. Se enviará la Actividad 2.3 como tarea para la siguiente clase, para reforzar ambas ideas.

Sesión 5: Fracciones equivalentes, simplificación y fracción irreducible.

En esta sesión se procederá a trabajar con fracciones equivalentes: para ello, de nuevo se les pedirá que comparen fracciones utilizando tarjetas, pero en este caso las fracciones elegidas medirán lo mismo (serán equivalentes). Esto corresponde a la actividad 2.1.1 del cuadernillo. Mediante esto, se explicará el concepto de **fracción equivalente**, y se pedirá que encuentren fracciones equivalentes a unas dadas, utilizando de nuevo las tarjetas (actividad 2.1.2), y siempre acompañándose de los símbolos correspondientes. En todo momento se enfatizará que se observe qué ocurre con los numeradores y denominadores cuando tenemos fracciones equivalentes. Utilizando esta idea, se intentará que el alumnado encuentre formas de hallar fracciones equivalentes, y finalmente el docente explicará que esto puede hacerse tanto "rompiendo piezas", lo que corresponde a multiplicar numerador y denominador por el mismo número, como al proceso inverso, lo que corresponde a dividir numerador y denominador por el mismo número. Se enviarán para casa las actividades 2.1.3, y 2.1.4, correspondiente a encontrar fracciones equivalentes a partir de una dada, de manera simbólica, así como a utilizar los decimales para comprobar sus soluciones.

Sobre esta última idea, se propondrán ventajas de tener números más pequeños (junto a casos reales) y se comentará que dicho proceso es la **simplificación.** Se intentará que los mismos alumnos lleguen a la conclusión de que tanto numerador como denominador deben tener algún divisor común para poder simplificar. Finalmente, se comentará la idea de **fracción**

irreducible y su utilidad tanto en matemáticas (trabajar con números más sencillos, estimar) como en la vida cotidiana (por ejemplo al cocinar, si queremos cambiar la receta según el número de personas, o si queremos estimar cuánto tardaremos, o cuánto nos costará realizar un determinado proceso,). Para trabajar esto, se propondrán las actividades 2.1.2., 2.2.2. y 2.2.3, que trabajan tanto el aspecto de representación (tarjetas) como numérico (símbolos) y cotidiano. Los primeros apartados se harán en clase y se dejará el final de la clase para que los continúen y traigan al día siguiente.

Sesión 6: La fracción como operador.

Comenzaremos de nuevo corrigiendo las tareas del día anterior. Tras esto, se comenzará a explicar la fracción de un número. Para ello, se utilizarán situaciones cotidianas en las que esto ocurra, correspondientes a la actividad 3.1. Estas situaciones trabajan tanto en contextos continuos como discretos. Se intentará que el alumnado sea el que identifique las fracciones que aparecen, y busque la forma de resolver los problemas que se plantean, para finalmente extrapolar los caminos seguidos hacia métodos más generales, potenciando así la capacidad del alumnado de reconocer patrones en estos problemas. También, se pedirá que inventen una situación correspondiente a casos concretos de números y fracciones (actividad 3.2). Como tarea, el alumnado deberá completar estos dos ejercicios, y además realizar los dos siguientes: la actividad 3.3, consistente en buscar una noticia en la que aparezcan fracciones, y la actividad 3.4, con más casos en los que aparece la fracción como operador.

Sesión 7: Problemas de fracciones y repaso de lo anterior.

Al inicio de la clase, se pondrán en común las distintas noticias encontradas por el alumnado, algunos alumnos saldrán a la pizarra a resolver los ejercicios propuestos.

Como forma de repasar y asentar el tema, hacemos una sesión dedicada a la resolución de problemas. Por recomendaciones del departamento, se insiste mucho en un modelo de problemas en que aparecen tres datos: la parte, el total y la fracción. Los problemas consisten dar dos de estos datos, y obtener el restante. Esto permite comprobar las relaciones existentes entre estos tres conceptos y dar la vuelta al mismo modelo de problema desde distintos enfoques y contextos. Se propondrán distintos problemas, recogidos en la sección 4 del cuadernillo, que se debatirán en clase y comentarán con el alumnado.

Se propondrán algunos problemas como tarea, que deberán realizarse en el cuaderno.

Sesión 8: Actividad evaluable intermedia.

Dado que en este punto acaba todo el contenido referente a los significados de las fracciones, antes de operar, realizaremos una pequeña actividad que servirá para asentar los contenidos y trabajar colaborativamente. Para ello, se dividirán las clases en grupos heterogéneos de tres o cuatro alumnos, y se realizará la actividad procedente del Shell Center. Dicha actividad consiste en un juego de tarjetas de símbolos y representaciones gráficas de fracciones, números decimales y flechas en la recta real. Cada grupo deberá ordenar las tarjetas pegando en columnas, sobre un folio A3, las tarjetas que correspondan a la misma fracción. Además, falta una tarjeta de cada tipo, que el alumnado deberá rellenar por su propia cuenta. El docente irá por los grupos resolviendo dudas, y preguntando al azar a uno de los integrantes por qué se está colocando de esa cierta manera, para que haya interés dentro del grupo porque todos sus miembros conozcan lo que se está haciendo. Esta actividad no sólo trabaja la capacidad de traducir entre distintos tipos de representación de las fracciones, sino que también hace que el alumnado tenga que organizar la información que tiene y disponerla de la mejor manera posible.

Sesión 9: Suma y resta de fracciones con el mismo denominador.

Para comenzar con la suma y resta de fracciones, se comenzará introduciendo la idea intuitiva de lo que esto supone: unir o suprimir piezas del mismo tamaño. Para ello se propondrá en clase la actividad 5.1.1. Dicha actividad corresponde a sumar y restar fracciones del mismo denominador mediante piezas del mismo tamaño. El docente explicará qué significado tiene esto, en base a situaciones reales y expresándose simbólicamente, para poner de relieve la relación. Se pondrá mucho énfasis en que las piezas que estamos sumando tienen el mismo tamaño (es decir, el mismo denominador), y se preguntará qué podemos deducir si trabajamos con piezas que no son iguales, intentando plantear un pequeño debate en clase sobre cómo solventar este problema. Por último, se propondrá realizar operaciones para las que no sirven las piezas que se tienen, ya sea debido a que faltan piezas o a que aparecen números negativos. Esto se incluye dentro de la actividad 5.1.2.

Como tarea para casa se pedirá completar el ejercicio propuesto anteriormente y, finalmente, se planteará la siguiente cuestión: ¿qué ocurre si opero con fracciones equivalentes?

Sesión 10: Suma y resta de fracciones con distinto denominador.

Para comenzar la clase, se propondrá la actividad 5.2.1. Esta actividad consiste en sumar fracciones utilizando el juego de tarjetas. Para ello, lo que se hará será buscar piezas del mismo tamaño que midan lo mismo que las piezas que se están sumando. Utilizando las actividades 5.2.2. a 5.2.5, se intentará que el alumnado busque relaciones entre los denominadores, y finalmente el docente explicará el significado de reducir a común denominador algebraicamente. El tiempo restante se dedicará a hacer ejemplos de sumas y restas de fracciones de manera simbólica, colocando a un lado si fuera necesario las representaciones gráficas correspondientes. Dichas representaciones se harán siempre en forma de rectángulos, ya que, al fijar la unidad, este modelo muestra de manera más clara cuándo las piezas son distintas que, por ejemplo, un diagrama circular.

Se enviará como tarea una batería de ejercicios de este tipo, correspondiente a la actividad 5.2.6.

Sesión 11: Problemas de operaciones con fracciones y repaso de todo el tema.

Dedicaremos la última sesión a reforzar las ideas sobre la suma y resta de fracciones con distinto denominador, mediante la corrección de todos los ejercicios propuestos el día anterior. Además de esto, se hará un repaso de todas las ideas planteadas a lo largo de la unidad, a modo de resumen y a fin de aclarar cuáles son los contenidos más importantes y la estructura de la prueba final. Se intentará de nuevo plantear la pregunta "¿qué es una fracción?" para que el alumnado reflexione sobre lo aprendido y compruebe su evolución.

Sesión 12: Prueba final.

Se evitaría que fuera el día siguiente a la última sesión, para que el alumnado tuviese algo más de tiempo para preguntar dudas y repasar el contenido. La prueba está incluida en el Anexo V.

12. Evaluación.

12.1 Evaluación del alumnado.

La evaluación se realizará según los criterios de evaluación y estándares de aprendizaje establecidos según la legislación e incluidos en la Tabla 3. Se hará de manera constructiva y en distintos momentos de la unidad, a fin de que el alumnado comprenda cuáles son sus errores y pueda trabajar en ellos. La evaluación se hará:

- Al comienzo de la unidad, mediante un cuestionario inicial, se comprobará el nivel previo al comienzo de la unidad.

- Durante el desarrollo, mediante el seguimiento del cuadernillo, los cuadernos y las demás tareas del alumnado, así como por la actividad evaluable intermedia de la Sesión 8.
- Al final del proceso, mediante una prueba final.

En cuanto al valor de cada parte, se asignan los porcentajes siguiendo la norma marcada por el departamento:

- 80% de la nota correspondiente a la prueba final. Esta prueba está realizada sobre 9 puntos, y se incluye, siguiendo el método del docente, un último punto correspondiente a los criterios de evaluación del bloque transversal. Estos criterios se escriben en la prueba para que el alumnado recuerde qué se está evaluando de este bloque. La prueba está incluida en el Anexo V.
- 20% correspondiente a actividades complementarias, de las cuales:
    - 10% corresponde al seguimiento de cuadernos, que se evaluarán según la rúbrica incluida en el Anexo IV.
    - 10% corresponde a la actividad evaluable intermedia. Para evaluar esta actividad se calculará el número de tarjetas en una posición adecuada, de entre las 36 tarjetas disponibles.

12.2. Evaluación de la unidad didáctica.

Al final de la unidad se dará al alumnado un cuestionario en el que deberán evaluar el desarrollo de la unidad didáctica, respondiendo a una serie de preguntas con valores entre 0 y 5, y también de respuesta corta. El cuestionario está añadido en el Anexo VI.

Referencias.

Referencias a autores.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver E. (1983). Rational Number Concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, (pp. 91-125). New York: Academic Press.

Mack, N. K. (1990) Learning fractions with understanding: building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(1): pp. 16- 32.

Nicolaou, A. y Pitta-Pantazi, D. (2015). The Impact of a teaching intervention on sixth grade student's fraction understanding and their performance in seven abilities that constitute fraction understanding. Memorias de CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (pp. 309–315).

Niss, M. (2003). Quantitative Literacy and Mathematics Competencies. *Quantitative Literacy: Why Numeracy Matters for Schools and Colleges*. 215-220

Rabadán, J. A., Cortijos, S., Hernández, D. y Hernández, E. (2014). Orientaciones para la atención educativa del alumnado que presenta dificultades de aprendizaje. I Congreso Internacional de innovación docente.

Sanz, M. T., Figueras, O., y Gómez, B. (2018). Las fracciones, habilidades de alumnos de 15 a 16 años. *Revista de Educación de la Universidad de Granada, 25:* 257-279.

Siegler, R.S., Thompson C. A. y Schneider, M. (2011) An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, 62(4): 273-296.

Vamakoussi, X. y Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, 28: 181–209.

Yeon Lee, M. y Hackenberg, A. J. (2014) Relationships between fractional knowledge and algebraic reasoning: the case of Willa. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 12: 975-1000.

Referencias legislativas.

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato.

Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato.

Orden de 14 de julio de 2016, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía, se regulan determinados aspectos de la atención a la diversidad y se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado.

Otras referencias.

Math Assessment Project (2015). Translating between Fractions, Decimals and Percents. Shell Center for Mathematical Education. Extraído de https://www.map.mathshell.org/lessons.php?unit=6120&collection=8

ANEXOS

Anexo I: Cuestionario Inicial.

1. ¿Qué es para ti, y para qué sirve, una fracción?

2. Representa usando dibujos y fracciones las siguientes situaciones, y contesta a las preguntas:

- 9 de cada 10 dentistas recomiendan Dentimax.
- For dinner, my father cuts a pizza in eight pieces, and I eat two pieces.
- En su viaje a suiza, mi tía ha traído seis tabletas de chocolate, y las va a repartir entre sus cinco sobrinos. ¿Cómo puede hacerlo? ¿Cuánto chocolate se queda cada sobrino? ¿Más o menos que si le dan una tableta?
- My cousin and I have three cookies to share. How much do I eat?
- Juan y yo nos hemos comido una tarta a medias, pero su trozo era el doble de grande que el mío.
- Para acompañar unos torrijas, he mezclado en un vaso una cucharada de canela y tres de azúcar. ¿Qué fracción de la mezcla es azúcar?

3. Propón tu propia situación en la que aparezcan fracciones.

4. Mi amigo Juan me ha ofrecido ha partido su tableta de chocolate en ocho trozos iguales, y me ha dado dos. María ha roto su tableta en cuatro trozos, y me ha dado uno. Si ambas tabletas tenían el mismo tamaño, ¿quién me está ofreciendo más chocolate? ¡Dibuja el chocolate!

5. In a class with 20 students, only a quarter did the homework. How many students did the homework? How many students did not?

6. En una bolsa con bolas de colores, la tercera parte son amarillas, la mitad son azules y la sexta parte son verdes. Si metemos la mano y elegimos una al azar, ¿qué color es más probable que tenga la bola?

7.

A) ¿Qué número es más pequeño? 1/2, 1/3, 1/6.

B) ¿Qué número es más grande? 1/3, 10/10, 1, 5, 5/10, 10/5

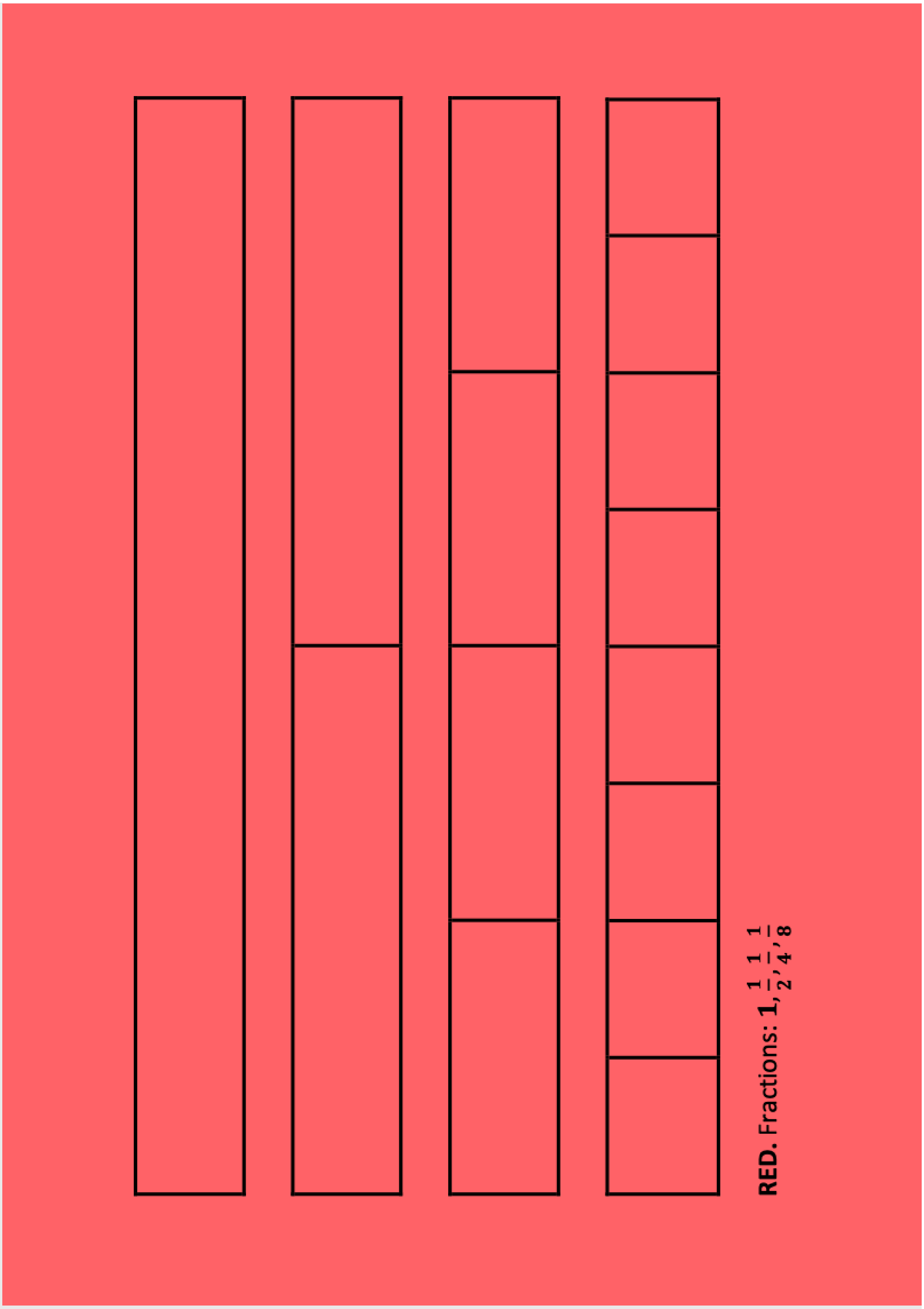
8. Calcula:

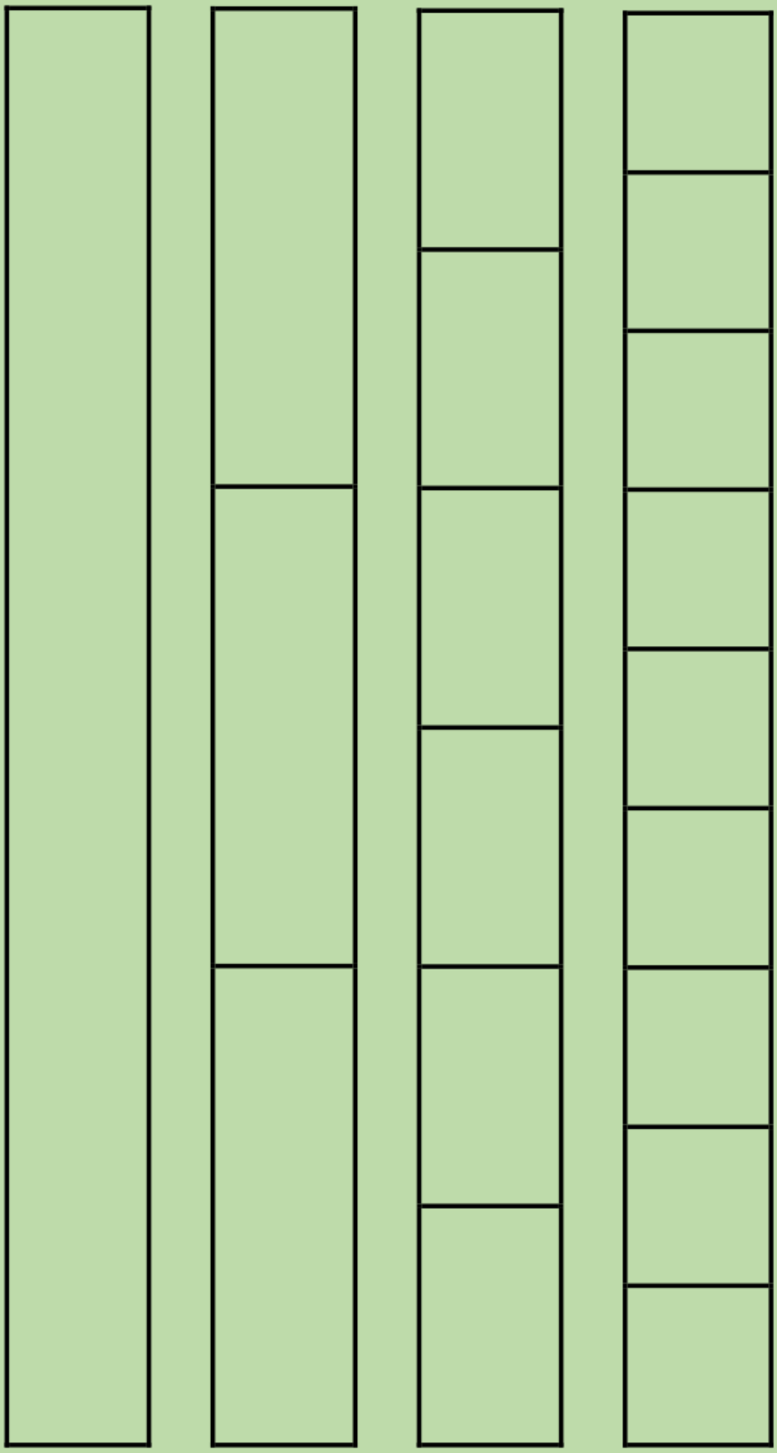
a) $\frac{2}{3}+\frac{3}{3}=$

b) $\frac{3}{3}-\frac{4}{4}=$

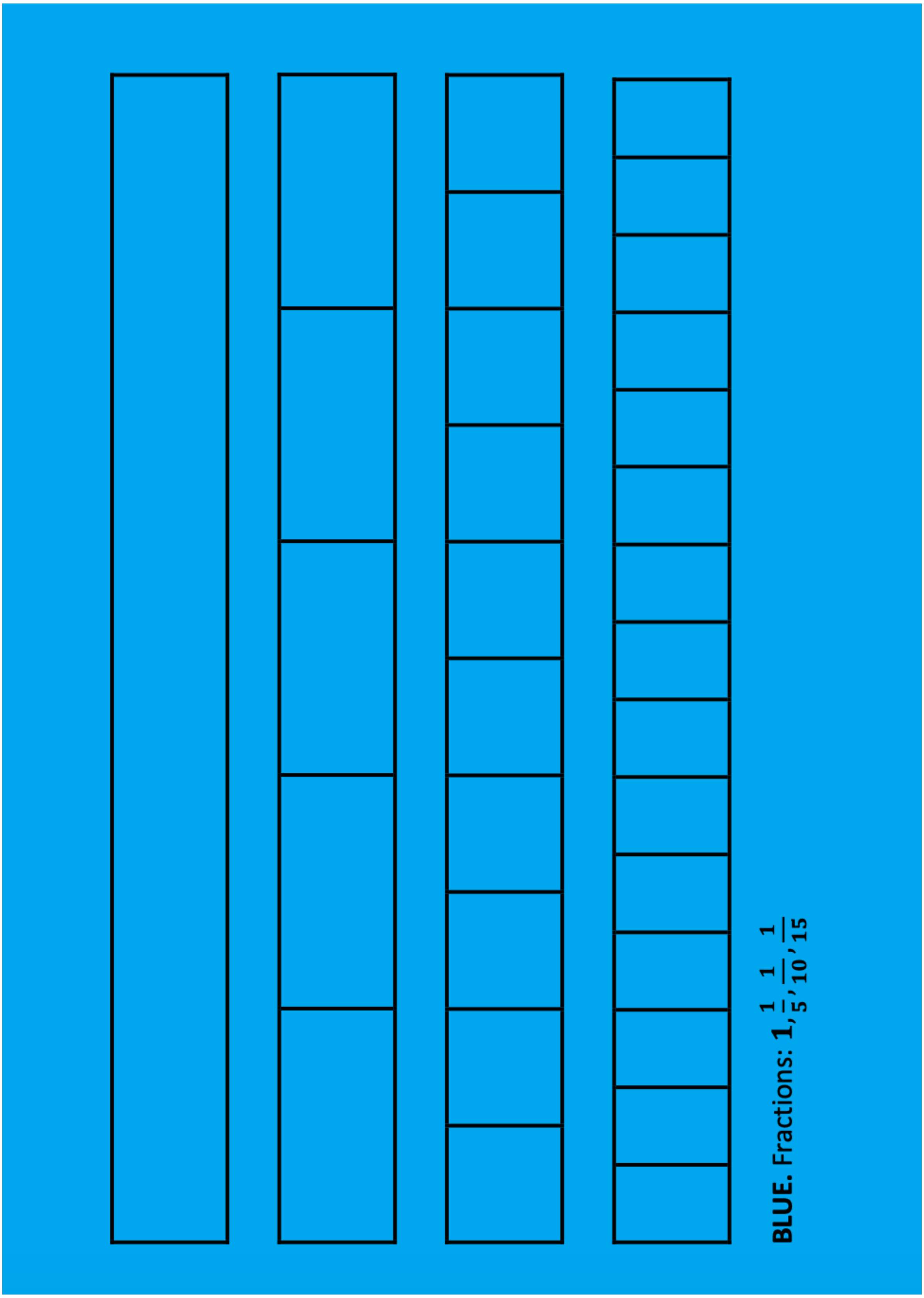
c) $\frac{3}{4}+\frac{4}{3}=$

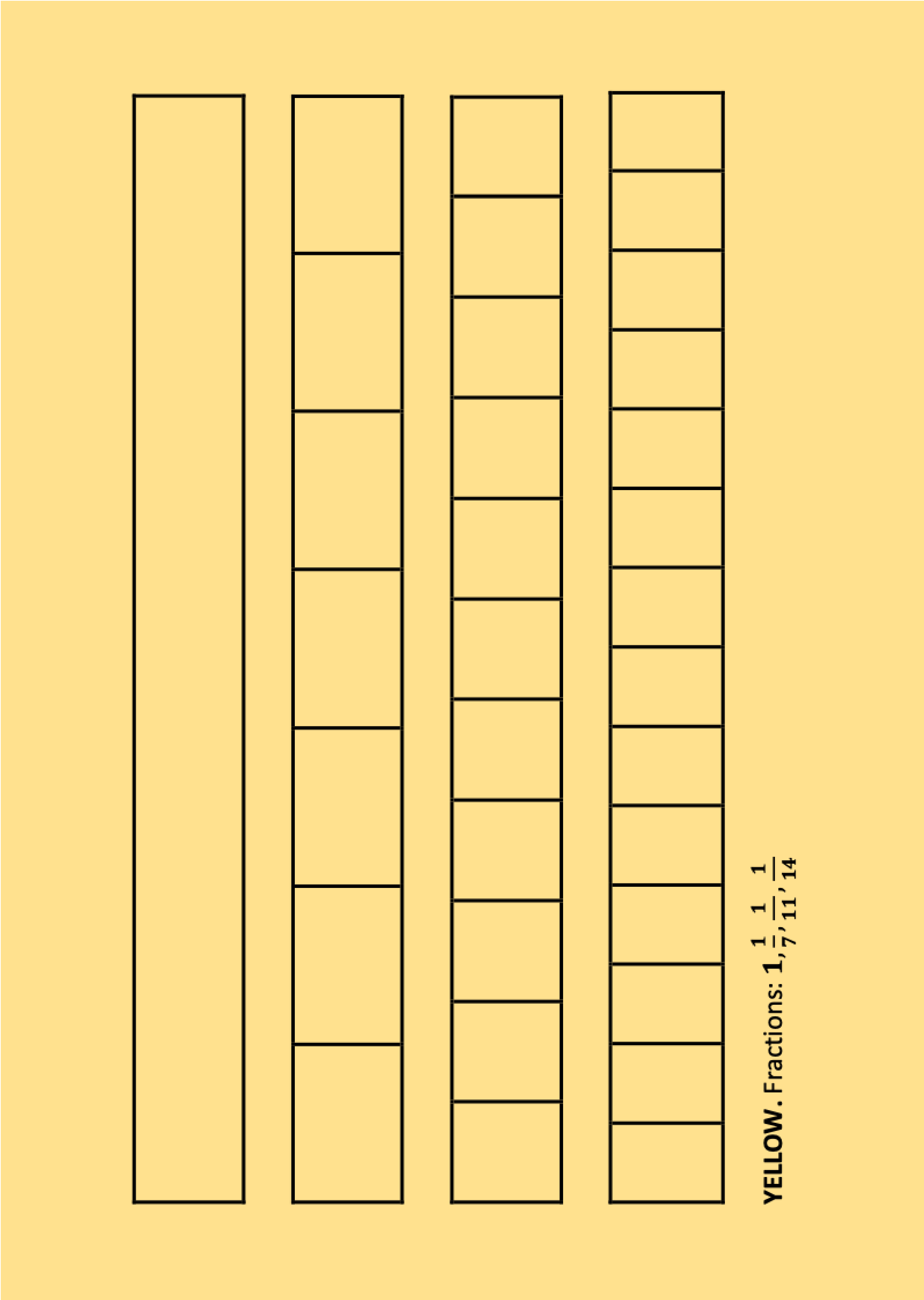
Anexo II: Juego de tarjetas.





GREEN. Fractions: $\mathbf{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{9}$

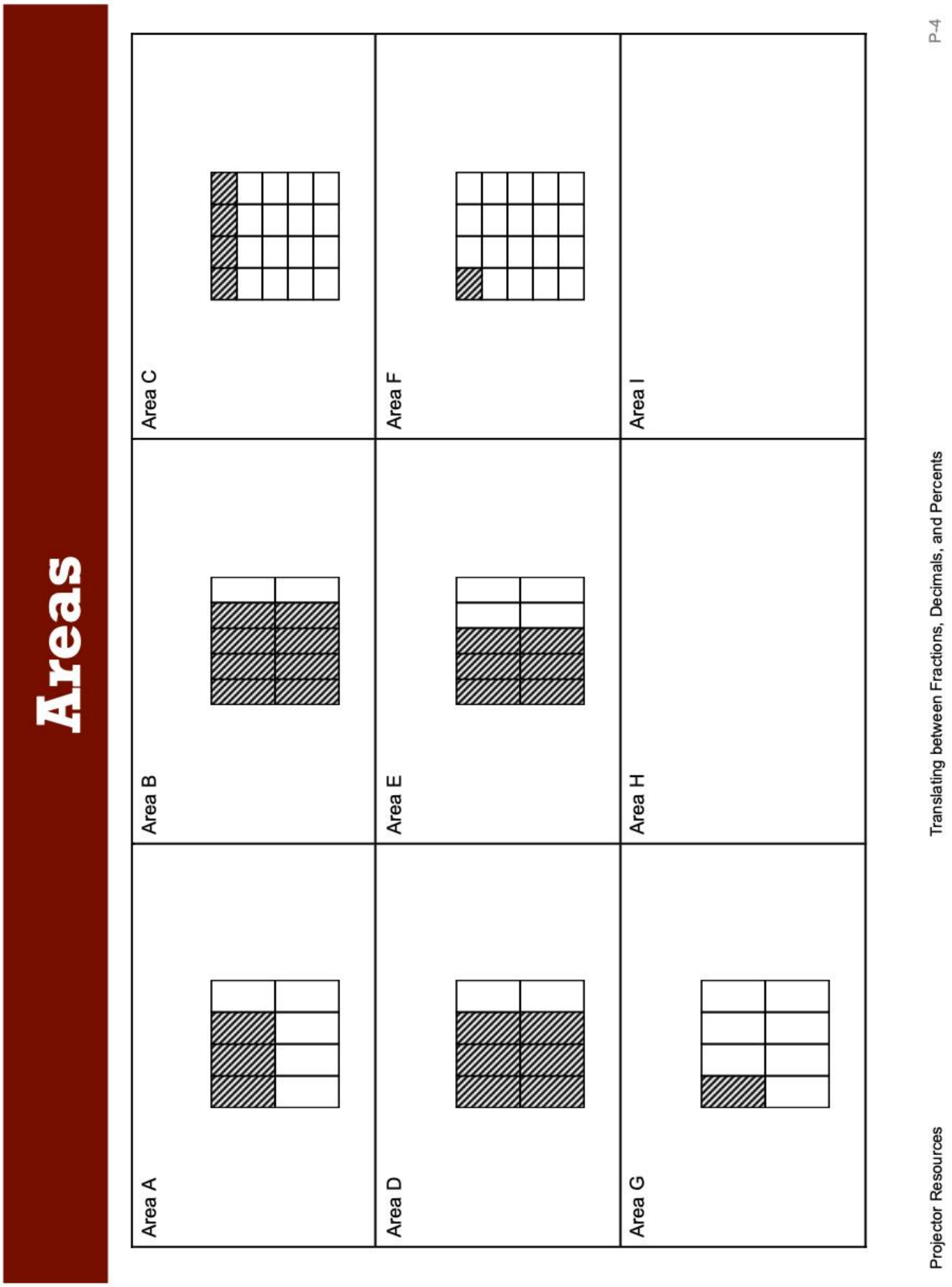

BLUE. Fractions: $\mathbf{1, \frac{1}{5}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}}$


YELLOW. Fractions: $\mathbf{1, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{14}}$

Anexo III: Tarjetas de la actividad intermedia evaluable.

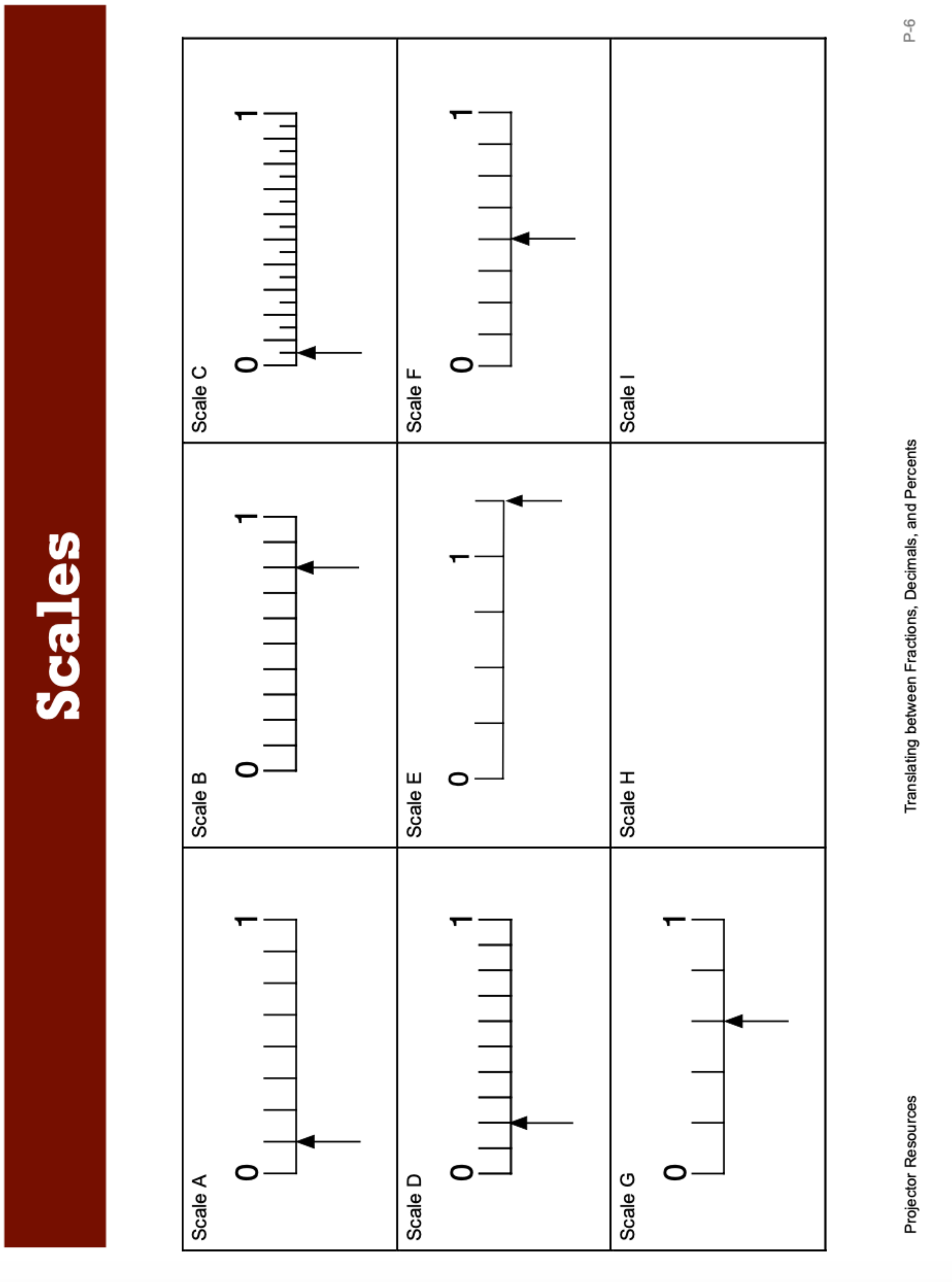
Decimal Numbers

0.2	0.05	0.8
0.375	0.125	0.75
1.25	0.5	


Areas
Area A
Area B
Area C
Area D
Area E
Area F
Area G
Area H
Area I
Projector Resources
Translating between Fractions, Decimals, and Percents
P-4

Fractions

$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{5}{4}$
$\frac{1}{8}$		


Scales
Scale A
Scale B
Scale C
Scale D
Scale E
Scale F
Scale G
Scale H
Scale I
0
1
Projector Resources
Translating between Fractions, Decimals, and Percents
P-6

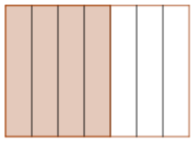
Anexo IV: Rúbrica de evaluación de cuadernos.

	1	2	3	4
Expresión.	No se da información relevante a las actividades que se están resolviendo.	Se centra en la resolución, y sólo se plantea la actividad en casos muy particulares.	La actividad se plantea, pero la solución no siempre aparece marcada de forma explícita.	Los ejercicios y problemas están bien expresados y estructurados (planteamiento y datos – resolución – solución - comprobación).
Calidad del contenido matemático.	No se presta atención a la corrección de lo que se escribe, con notas erróneas y fuera de contexto, y gran cantidad de ejercicios sin corregir.	Hay notas mal tomadas, y resultados mal resueltos y sin corregir. Algunos resultados son incoherentes.	Las notas y resultados son correctos, y aparecen correcciones, pero éstas no se justifican. Se repiten pocos fallos, pero se observa una evolución.	Las notas y resultados que aparecen en el cuaderno son correctos, y aparecen correcciones explicando fallos previos. No se repiten fallos. Se analiza la coherencia de los resultados, en relación al número de soluciones del problema.
Interés y profundización.	No se muestra interés en profundizar sobre el tema.	Aparecen escasas preguntas, a veces incoherentes y sin resolver.	Hay evidencias de dudas resueltas, y algunos cambios en los datos de los problemas.	Aparecen distintas formas de resolución y preguntas de profundización (cambiando datos del mismo problema), resueltas correctamente.
Aplicaciones y enfoque interdisciplinar.	El contenido aparece desconectado de cualquier aplicación o área de conocimiento.	Aparecen menciones a otras partes de la asignatura.	Se mencionan algunos casos de la vida cotidiana y de las unidades anteriores.	Se interrelaciona lo aprendido con la vida cotidiana, conocimientos previos y de áreas.

Anexo V: Examen de la unidad.

EXAMEN TEMA FRACCIONES. 1º DE ESO.

1. Complete the following table: (2.5 points).

Fraction	Decimal	Name	Representation
$\frac{4}{5}$			
		Two thirds.	
$\frac{3}{2}$			
	0.5		
			

2. Do the following operations. (2.5 points)

a) $\frac{2}{3}+\frac{5}{6}=$ b) $\frac{3}{6}-\frac{2}{3}=$ c) $-\frac{4}{5}+3=$

e) $\frac{1}{6}-\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{2}\right)=$

f) $-\frac{3}{5}-\frac{2}{6}+2=$

3. I am saving 2 out of every 7 euros I get. My friend Javi is saving 3 out of every 9 euros he gets. If we get the same amount of money, who will save more? (1 point)

4. One third of the people in this class plays Fortnite, but only half of them are ranked gold or higher. If there are 18 people in this class, how many of them are ranked gold or higher? (1 point)

5. In a relay race, Juan ran $\frac{1}{3}$ of the race, María ran the next $\frac{2}{5}$, and I ran what was left. Which stage was longer? (1 point)

6. The tallest building in the world is Burj Khalifa, in Dubái. It is 828 meters tall. In comparison, the tallest tower in Spain is the Torre de Cristal, in Madrid. If the height of the Torre de Cristal is $\frac{3}{10}$ of the height of the Burj Khalifa. How tall is the Torre de Cristal? (1 point)

Criterios de evaluación transversales:

CE 1.1 Expresa verbalmente el proceso seguido en la resolución de un problema.	CE. 1.2. Utilizar procesos de razonamiento y estrategias de resolución de problemas, realizando los cálculos necesarios y comprobando las soluciones obtenidas.	CE. 1.5. Elaborar y presentar informes sobre el proceso, resultados y conclusiones obtenidas en los procesos de investigación.	CE. 1.10. Reflexionar sobre las decisiones tomadas, aprendiendo de ello para situaciones similares futuras.

Anexo VI: Cuestionario de evaluación de la unidad.

Valora las siguientes afirmaciones, rodeando con un círculo un número de 0 (muy en desacuerdo) a 5 (muy de acuerdo).

Afirmación para evaluar	Valoración
El profesor iba demasiado rápido durante las clases.	0 1 2 3 4 5
El profesor parecía seguro de los conocimientos que impartía.	0 1 2 3 4 5
Las clases resultaban muy aburridas.	0 1 2 3 4 5
El juego de tarjetas me ha ayudado a comprender mejor la idea de fracción.	0 1 2 3 4 5
Los recursos digitales, y las explicaciones en la pizarra, ayudaban a entender lo que se estaba haciendo.	0 1 2 3 4 5
Los comentarios del profesor sobre matemáticas divulgativas resultaban interesantes.	0 1 2 3 4 5
He sentido que participaba en las clases y no era un mero espectador.	0 1 2 3 4 5
Siento que lo que he aprendido me será útil en mi vida diaria.	0 1 2 3 4 5
El profesor estaba disponible para resolver dudas y lo hacía con efectividad.	0 1 2 3 4 5
Las clases estaban bien preparadas.	0 1 2 3 4 5
Estoy contento con la enseñanza de este profesor.	0 1 2 3 4 5

¿Qué es lo que más te ha gustado de esta unidad? ¿Qué es lo que menos?

Anexo VII: Cuadernillo de actividades de fracciones

FRACTION BOOKLET
1º E.S.O.

June 13, 2020

Contents

1 Exploring

1. Each of the rectangles that we present in this game represents a piece of the largest one. This one will be the **unit**. Identify each of the rectangles and complete the following table:

Representation	Name of the fraction	Symbol
Small red	An eighth	$\frac{1}{8}$
Medium red		
Big red		
Small green		
Medium green		
Big green		
Small blue		
Medium blue		
Big blue		
Small yellow		
Medium yellow		
Big yellow		

2. Write the following fractions, given by their names:

Name	Symbol
a fifth	$\frac{1}{5}$
three quarters	
two thirds	
a half	
three halves	
five thirds	
six sevenths	
four fifths	
five eights	
six thirds	
seven quarters	

3. Represent the indicated fractions using a rectangle as the unit. Try looking at your cards!

Symbol	Name	Representation
$\frac{1}{5}$		
$\frac{3}{4}$		
$\frac{3}{6}$		
$\frac{5}{8}$		
$\frac{4}{6}$		
	five thirds	
	six sevenths	
	four fifths	
	five eighths	
	six thirds	
	seven quarters	

4. Put these pieces together. What fraction do they represent? Take the rectangles from your game, give a name to the fraction that represents the union of all the pieces and write the corresponding fraction.

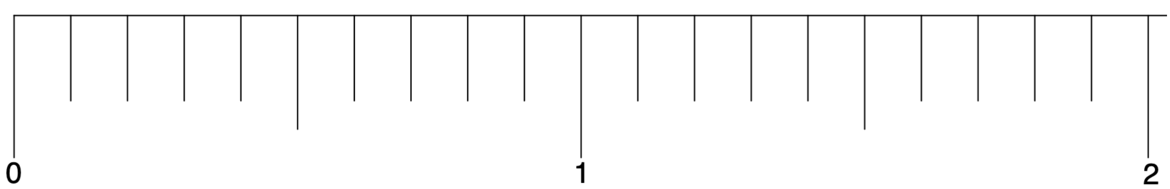
    (a) Three medium-sized red ones.
    (b) Four small red ones.
    (c) Five small green ones.
    (d) Three big blue ones.
    (e) Two big green ones.
    (f) Seven small blue ones.
    (g) Five medium-sized yellow ones.

5. Imagine that you had enough pieces to make the following combinations. What fraction would they represent?

    (a) Three big yellow ones.
    (b) Nine medium-sized red ones.
    (c) Seven medium-sized green ones.
    (d) Five medium-sized big ones.
    (e) Thirteen small red ones.
    (f) Eleven small blue ones.

6. Transform the following fractions into decimal numbers, and put them in the corresponding position of the real line:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{5} \quad \frac{7}{6} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{5}{3}$$



2 Comparing fractions.

2.1 Obtain the following fractions using pieces from your card game:

(a) $\frac{1}{3}$ and $\frac{1}{4}$.
(b) $\frac{1}{5}$ and $\frac{4}{5}$.
(c) $\frac{2}{3}$ and $\frac{5}{6}$.
(d) $\frac{4}{9}$ and $\frac{2}{5}$

In each case, which one is bigger?

2.2 In the school break, your friend buys a chocolate bar. You ask him to give you some chocolate, but he does not want to give you too much. After some arguing, he lets you decide to:

(a) Divide the chocolate in 5 pieces. You take 2 and he takes the rest.
(b) Divide the chocolate in 8 pieces. You take 3 and he takes the rest.

What would you prefer to do?

2.3 Compare the following fractions:

(a) $\frac{2}{5}$ and $\frac{3}{8}$.
(b) $\frac{2}{3}$ and $\frac{5}{6}$.
(c) $\frac{3}{9}$ and $\frac{1}{3}$.
(d) $\frac{9}{3}$ and $\frac{5}{2}$.

2.1 Equivalent fractions.

1. Obtain from your game the fractions indicated in each section.

(a) $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$ and $\frac{4}{8}$
(b) $\frac{1}{3}$ and $\frac{3}{9}$.
(c) $\frac{1}{5}$ and $\frac{2}{10}$
(d) $\frac{3}{6}$ and $\frac{1}{2}$
(e) $\frac{3}{15}$ and $\frac{1}{5}$
(f) $\frac{4}{6}$ and $\frac{2}{3}$

What can we say about the total length in each of the previous sections?

Definition 1 *Two fractions are said to be* ***equivalent*** *if they represent the same quantity.*

In that sense, if your friend offers you two equivalent fractions of chocolate, it does not matter which one you choose. You get the same amount of chocolate!

2. Using your pieces, find equivalent fractions to the following ones:
   (a) Two medium-sized red ones.
   (b) Five small yellow ones.
   (c) A big green one.
   (d) Three medium-sized green ones.
   (e) A big blue one.

3. Complete the table in the next page. To do that, find equivalent fractions to the ones that appear.

4. Using the calculator, verify that the equivalent fractions that you have computed in the previous exercise are correct.

5. Explain which of the following situations correspond to equivalent fractions:
   (a) My brother and I share an orange, so I give each of us four out of the eight slices, but she says that it is better to break the orange in two halves.
   (b) My aunt and my uncle shared six cookies, so each of them took three, that is, each of them ate half a cookie.
   (c) Two of my guitar strings are untuned, that is, one third of the strings. *Remember that a guitar has* 6 *strings!*.

$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{6}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{4}{8}$
$\frac{3}{5}$			
$\frac{7}{2}$			
$\frac{5}{6}$			
$\frac{7}{5}$			
$\frac{8}{8}$			
$\frac{1}{3}$			
$\frac{5}{15}$			
$\frac{2}{10}$			
$\frac{1}{7}$			

2.2 Simplifying fractions.

Definition 2 *To **simplify** a fraction is to obtain an equivalent fraction with smaller numbers.*

2.2.1 Using your card game, find equivalent fractions to the following ones. You are only allowed to use bigger pieces.

(a) Two small red ones.

(b) Six small green ones.

(c) Four medium blue ones.

Definition 3 *An **irreducible fraction** is a fraction that can't be simplified.*

2.2.2. Represent the following fractions, and simplify to obtain the irreducible fraction:

(a) $\frac{4}{6}$

(b) $\frac{2}{8}$

(c) $\frac{3}{9}$

(d) $\frac{1}{9}$

(e) $\frac{3}{3}$

3 The fraction as an operator

1. Sometimes fractions are used to indicate an operation on a quantity. For instance,

   (a) Sales! Pay only half of the total prize (575€).

   (b) Give me a quarter of kilo (1000 grams) of cheese.

   (c) It took us three quarters of an hour to arrive. (1 hour = 60 minutes).

   (d) Two fifths of the population smoke regularly. (Population in Puerto Real: 40000 inhabitants).

   (e) Yesterday, we ran a half marathon. (A marathon = 42.195 km).

   (f) One out of ten students in this high school is in 1º ESO (This high school has 600 students).

   (g) Only 2 out of 7 people are taller than 1.70 meters (there are about 7000000 people in the world).

Express the former sentences using fractions, and answer the following questions:

(a) How much do we have to pay?

(b) How many grams of ham did we order?

(c) How many minutes did it took us?

(d) How many inhabitants smoke in Puerto Real?

(e) How many students are there in 1º ESO?

(f) How many people are taller than 1.7 meters?

2. Create a new sentence, similar to the ones in the previous exercises, for each of the set of pieces indicated:

   (a) Three medium-sized yellow ones.

   (b) Five medium-sized green ones.

   (c) Three medium-sized red ones.

   (d) Four medium-sized blue ones.

3. Find sentences in a newspaper which make use of fractions.

4. Answer the following questions:

   (a) In music, the three-four time (compás de tres por cuatro) is used in many flamenco songs. It means that one out of three beats is stronger. After 12 beats, how many of them will be strong beats?

   (b) I spend a quarter of my day time (24 hours) at school. How much time do I spend at school?

   (c) In the supermarket, the price of the bananas was $\frac{4}{3}$ of the price of the apples. If a kilo of apples cost 3 euros, how much does a kilo of bananas cost?

4 Problems with fractions

1. My friend is saving 2 out of every 7 dollars that she earns. I am saving 3 out of every 8 dollars instead.

   (a) If we both earn the same amount of money, who will save more?

   (b) On the contrary, if we have both earned the same amount of money, who has obtained more money?

2. Nine out of ten restaurants in my town buy their fish to local fishers. If there are 45 restaurants, how many of them buy their fish to local fishers?

3. My sister and I share a pizza, so we divide the pizza in two pieces, but my piece was double the size of hers. What fraction of the pizza did I eat?

4. After spending a quarter of my money, I have 40 euros. How much money did I have in the beginning?

5. In the local market, two kilos of chicken cost 6 euros. How much does one kilo of chicken cost? How much does 3 and a quarter kilos?

6. $\frac{4}{9}$ of a consignment of oil weight $\frac{1826}{5}$ kg. How much does the whole consignment weight?

5 Addition and substraction.

5.1 Equal denominator.

1. Express the following sums using fractions, and do the operation:

   (a) Three small blue ones plus two small blue ones.

   (b) Two small red ones plus a small red one.

   (c) Four small green ones plus a small green one.

   (d) Three big green ones plus a big green one.

(e) Two big red ones plus five red big ones.

(f) Three big yellow ones plus five big yellow ones.

2. Express the following subtractions using fractions, and do the operation:

   (a) Three small yellow ones minus two small yellow ones.

   (b) Two small red ones minus a small red one.

   (c) Four small green ones minus three small green ones.

   (d) Three big green ones minus a big green one.

   (e) Two big red ones minus five big red ones.

3. Do the same operations in the previous exercises using equivalent fractions.

4. Do the following computations and represent the result graphically (draw the result!).

Operation	Result	Representation
$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}$		
$\frac{3}{5}-\frac{4}{5}$		
$\frac{1}{3}+\frac{4}{3}$		
$\frac{3}{10}-\frac{2}{10}$		

5. Look for equivalent fractions for the results of the previous exercise.

   Definition 4 *In order to add and substract fractions, we can think that we are "counting" equal pieces.*

5.2 Different denominator.

1. Express the following sums using the name of the pieces that you must use, and the fractions. Do the computation:

   (a) Three small blue ones plus two big green ones add up to

   (b) Two small red ones plus a big red one add up to

   (c) Four small green ones plus a big red one add up to

   (d) Three big green ones plus a big yellow one add up to

   (e) Two big red ones plus five big blue ones add up to

2. Express the following operations using fractions. Think about the pieces that they correspond to. Do the computation.

   (a) Three small green ones minus two big green ones is

   (b) Two small red ones minus a big red one is

   (c) Four big green ones minus a big red one is

   (d) Three big green ones plus a medium green one is

   (e) Two big red ones minus five big blue ones is

3. Do the following computations. Represent the results using the pieces.

Operation	Equivalent fractions	Result
$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}$		
$\frac{3}{2}-\frac{4}{5}$		
$\frac{1}{3}+\frac{4}{2}$		
$\frac{3}{6}-\frac{2}{3}$		

4. Find the irreducible fraction for the results of your previous exercise.

5. In your notebook, write a rule to add and substract fractions with different denominators.

6. Do the following operations:

(a) $\frac{1}{4} + \frac{3}{5} =$
(b) $\frac{3}{5} - \frac{3}{6} =$
(c) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} =$
(d) $\frac{5}{3} - \frac{6}{5} =$
(e) $\frac{1}{4} + \frac{3}{4} =$
(f) $\frac{1}{2} + \frac{3}{5} =$
(g) $\frac{3}{2} + \frac{3}{4} =$
(h) $\frac{5}{6} - \frac{3}{6} =$
(i) $\frac{4}{7} + \frac{1}{7} =$
(j) $\frac{4}{5} + \frac{3}{6} =$
(k) $6 + \frac{3}{6} =$
(l) $1 - \frac{5}{2} =$
(m) $2 + \frac{6}{2} =$
(n) $3 + \frac{5}{2} =$
(o) $\frac{1}{7} + \frac{5}{2} =$
(p) $\frac{3}{5} + \frac{6}{2} =$
(q) $\frac{3}{2} + \frac{5}{2} =$
(r) $\frac{9}{7} - \frac{3}{7} =$
(s) $\frac{4}{3} - \frac{3}{2} =$
(t) $1 + \frac{3}{2} =$
(u) $2 + \frac{5}{2} =$
(v) $1 + \frac{3}{4} =$
(w) $3 + \frac{3}{5} =$
(x) $5 - \frac{3}{4} =$
(y) $9 + \frac{3}{6} =$
(z) $4 + \frac{1}{7} =$

6 Problems about addition and subtraction.

1. You got a half, I got the third part, and the rest, 100€, we gave it to him. How much money did we have in the beginning?

2. I shared 75000€ among three people, in such a way that the first person received the double of the second, and the second, the triple of the third. How much did each person get?

3. Yesterday, I bought a box of cookies and ate $\frac{1}{4}$ of it. Then, this morning I ate $\frac{1}{3}$, and now I only have 5 cookies. How many cookies were there in the box in the beginning?

4. This year, the amount of people coming to Cádiz in vacation has increased by $\frac{1}{3}$. If last year there were 3000 visitors, how many people came this year?

5. How many minutes are there in $\frac{5}{4}$ of an hour?

6. A man spends $\frac{1}{3}$ of his monthly wage in eating; the fifth part in dressing up; $\frac{2}{15}$ in having fun; $\frac{1}{6}$ in transport; and he still has 25000€ left. How much does he earn each month?